

TEMEL KAVRAMLAR

Veri Türleri – Panel Veri

Ekonometrik analizlerde, zaman serisi verisi, yatay kesit veri ve panel veri olmak üzere üç çeşit veri türü bulunmaktadır. Bunlar; değişkenlerin değerlerinin gün, ay, mevsim, yıl gibi zaman birimlerine göre değişimini içeren zaman serisi verisi, zamanın belli bir noktasında, farklı birimlerden toplanan yatay kesit veri ve yatay kesit gözlemlerin, belli bir dönemde bir araya getirilmesi olarak tanımlanan panel veridir. Panel veri, N sayıda birim ve her bir birime karşılık gelen T sayıda gözlem-den oluşmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 1).

Dengesiz Panel Veri Modelleri

Dengesiz Paneller

Panel verilerle çalışıldığında her bir birime ait veriler tüm zamanlar boyunca tamsa “*dengeli panel*”; eğer veri setinde bazı birimler için bazı dönemlere ait veriler kayıpsa “*dengesiz panel*” söz konusu olmaktadır. Yapılan uygulamalı çalışmalarda, genellikle dengesiz panel verilerle karşılaşmaktadır. Dengeli panel veriler için geliştirilmiş tahmin yöntemleri ve testlerin, dengesiz paneller için kullanımında bazı kısıtlamalar olmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 23).

Dengesiz Panellerle Karşılaşma Nedenleri

Dengesiz panel veri setleri ile karşılaşmanın çok çeşitli nedenleri olmasına rağmen en önemlileri aşağıdaki gibidir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 24-25):

- Dengesiz panel veri setleri ile karşılaşmanın en önemli sebebi, tesadüfi olarak ortaya çıkan kayıp gözlemlerdir.
- Bazı sebeplerle, bazı birimlere ait verilerin bir kısmı olmayabilmektedir.

Dengesiz Panellerin Kullanılabilirliği

Dengesiz panel veri setleri ile çalışabilmek için bazı yöntemler kullanılabilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 25):

- Kayıp gözlemlerde veya panele giriş ve çıkışta tesadüfilik varsa, dengeli panel için kullanılan metotlar dengesiz panel için de geliştirilebilmekte ve tahminler tutarlı olmaktadır.
- Eksik verisi olan dönem tüm birimler için düşürülerek panel dengeli hâle getirilebilir. Ancak farklı dönemlerde eksik gözlemler varsa çok sayıda gözlem kaybedilebilir. Ayrıca bu yöntem, zaman boyutunda süreklilik gerektiren analizler için uygun değildir.

- Kayıp gözleme sahip birimler örnekten tamamen düşürülerek panel dengeli hâle getirilebilir. Birim sayısı fazla ve kayıp gözlemler belirli birimlerde toplanmışsa bu yöntem kullanılabilir. Kayıp gözlemler birimlerin büyük kısmına yayılmışsa birim kaybı fazla olacağından uygun değildir.
- Kayıp gözlemler bazı algoritmalar kullanılarak tamamlanabilir. Kayıp gözlem sayısı az ve mevcut veriler yeterli ise bu yöntem uygun olabilir. Ancak fazla sayıda veya ardışık kayıp gözlemlerde sağlıklı sonuç vermeyebilir.
- Panele giriş ve çıkış sürecine ilişkin bilgi varsa model bu süreçleri içerecek şekilde düzenlenebilir. Ancak bu bilgi nadiren sağlanabilmektedir.

Dengesiz Panel Veri Modellerinin Tahmin Metotları

Doğrusal dengeli panel veri modellerinin tahmini için kullanılan yöntemlerin hepsi (Havuzlanmış En Küçük Kareler, sabit etkiler için Grup İçi Tahminci, Gölge Değişkenli En Küçük Kareler, Gruplar Arası Tahminci, tesadüfi etkiler için Genelleştirilmiş En Küçük Kareler, En Çok Olabilirlik gibi¹) dengesiz paneller için de kullanılabilir. Dinamik panel veri modellerinde, dengesiz panel veri seti ile çalışıldığında tahmin için birinci farklara dayanan yöntemler kayıp gözlem sayısını ardışık olarak arttıracığından, yerine ileri ortogonal sapmalara dayanan yöntemlerin kullanılması daha uygun olmaktadır. Panel zaman serilerinde ise, heterojen birim kök, eşbütünleşme ve nedensellik testleri ile VAR ve hata düzeltme modellerinde dengesiz paneller için geliştirilen tüm yöntemler kullanılabilmesine karşın homojen olan test ve tahmin yöntemleri bazı kısıtlar altında kullanılabilmekte ya da kullanılamamaktadır. Yine de yöntemleri kullanmadan önce, eksik gözlem miktarının birimlerden elde edilecek bilgilerin yeterliliğini etkilemeyecek düzeyde olmasına dikkat edilmelidir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 26-38).

Dönümlü Paneller

Dönümlü panel, önceden belirlenmiş bazı kurallar nedeniyle, bazı dönemlerde bazı birimlerin (kişi, firma vb. gibi) örnekten düşmesi ve yenilerinin eklenmesi olarak tanımlanmaktadır. Özellikle mikro çalışmalarda döndürme çok görülmektedir. Örneğin, 1. dönemde $1, 2, \dots, N$ birim, 2. dönemde $1, \dots, m_1$ ($0 \leq m_1 \leq N$) birim ve 3. dönemde $m_1+1, \dots, m_1+m_2$ ($0 \leq m_2 \leq N$) birim için veriler vardır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 38).

¹ Detaylı bilgi için bkz. F. Yerdelen Tatoğlu, “Panel Veri Ekonometrisi: Stata Uygulamalı”, “3. Bölüm Tek Yönlü Birim Etkili Panel Veri Modelleri ve Tahmin Yöntemleri”, 7. Baskı, 2023, Beta Basım Yayın AŞ, İstanbul.

Dönüştürülmüş Panel Veri Modellerinin Tahmini

Modelin tahminine geçmeden önce basitleştirmek amacıyla, her dönem sabit bir sayıda birimin örnekten düştüğü ve ana kütlede aynı sayıda birimin örneğe eklendiğini varsayalım. Toplam gözlem sayısı; $H=N+(T-1)m$ olacaktır. i . birimin gözlemlendiği zaman sayısı q_i ile gösterilirse, $q_i=T-t_i+1$ 'dir. i . birim için zaman serisi gözlemleri vektör formunda şöyle gösterilebilmektedir:

$$Y_i = X_i\beta + v_i$$

Burada, $Y_i = (Y_{it_1}, \dots, Y_{it_{q_i}})'$, $X_i = (X_{it_1}, \dots, X_{it_{q_i}})'$, $v_i = (\mu_i + u_{it_1}, \dots, u_{it_{q_i}})'$ eşitlikleri vardır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 38).

v_i 'nin varyans kovaryans matrisi aşağıdaki gibidir:

$$q_i = 1 \text{ ise } (T_i = t_i), \quad \Omega = \sigma_u^2 + \sigma_\mu^2$$

$$q_i > 1 \text{ ise } (T_i > t_i), \quad \Omega = E(v_i v_i') = \sigma_u^2 I_{q_i} + \sigma_\mu^2 J_i$$

J_i , tüm elemanları 1'e eşit olan $q_i \times q_i$ boyutlu bir matristir. Ters matrisler:

$$q_i = 1 \text{ ise, } \Omega^{-1} = (\sigma_u^2 + \sigma_\mu^2)^{-1}$$

$$q_i > 1 \text{ ise, } \Omega^{-1} = \frac{1}{\sigma_u^2} \left[I_{q_i} - \frac{\sigma_\mu^2}{\sigma_u^2 + q_i \sigma_\mu^2} J_i \right]$$

Genelleştirilmiş en küçük kareler tahmincisi (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 39):

$$\hat{\beta}_{GEKK} = \left[\sum_{i=1}^{N+(T-1)m} X_i' \Omega_i^{-1} X_i \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^{N+(T-1)m} X_i' \Omega_i^{-1} Y_i \right]$$

En çok olabilirlik tahmincisi de benzer şekilde, aşağıdaki olabilirlik fonksiyonunun logaritmasının maksimum edilmesi ile elde edilebilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 39):

$$\begin{aligned} \log L = & -\frac{NT}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^{N+(T-1)m} (q_i - 1) \right] \log \sigma_u^2 - \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^{N+(T-1)m} \log (\sigma_u^2 + q_i \sigma_\mu^2) \right] \\ & - \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^{N+(T-1)m} (Y_i - X_i \beta)' \Omega_i^{-1} (Y_i - X_i \beta) \right] \end{aligned}$$

Yapay Paneller (Pseudo Paneller)

Uygulamada bazen aynı birimler için tüm zaman dilimlerinde düzenli olarak veri bulunmasında problemler yaşanabilmekte, bu durumda araştırmacılar ana kütlenin büyük bir tesadüfi örneğini kullanmaktadır. Örneğin yıllık hane halkı anketlerinde her zaman diliminde aynı birimler için veriler bulunamamakta ve bu nedenle birimlere ait gözlemlerin kullanılması yerine kuşak ortalamaları kullanılabilir. Böylece, gerçek panele göre daha fazla düzenli veri toplama imkânı doğabilmekte, veri sayısı ve dolayısıyla serbestlik derecesi artmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 39).

Her bir dönemde, aynı sayıda birimden tesadüfi olarak veri toplandığı ve c kuşağının tüm dönem boyunca aynı kalan birimleri temsil ettiği varsayımları altında kuşak ortalamaları ile model:

$$\bar{Y}_{ct} = \bar{X}'_{ct}\beta + \bar{\mu}_{ct} + \bar{u}_{ct}$$

$\bar{Y}_{ct}$, t zamanında Y_{it} 'nin c kuşağına ait ortalamasıdır. Genelde $\bar{\mu}_{ct}$, X_{it} ile korelasyonlu olduğundan, model grup içi kuşak dönüşümü ile sabit etkiler varsayımıyla tahmin edilmektedir. Bu tahminci, “Deaton’un tahmincisi” (1985) olarak bilinmektedir ve kuşaklardaki birim sayısı fazla ise kullanımı uygundur (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 40).

Kuşak sayısının fazla, her bir kuşakta yer alan gözlem sayısının az olduğu durumda ise, ortalama kuşak boyutu (n_c) büyük olmayacağından örnek kuşak ortalamaları ana kütle kuşak ortalamalarının kesin olmayan tahminleri olacaktır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 40).

Verbeek ve Nijman (1992)’nin çalışmalarının sonuçlarına göre (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 40):

- Grup içi tahmincinin tutarlılığını için n_c 'nin sonsuza gitmesi önemli koşuldur.
- c ya da t sonsuza giderken n_c 'nin sonlu olduğu durumda, Deaton’un tahmincisi tutarlıdır.
- n_c büyük olsa bile, grup içi tahminciye sapma önemli olabilmektedir.

Bunlara ilaveten, varyanstaki ölçme hatasını minimize edebilmek için kuşak seçimi önemlidir, özellikle kuşaklarda yer alacak birimlerin mümkün olduğunca homojen olmasına dikkat edilmelidir. Ayrıca, farklı kuşakların da mümkün olduğunca heterojen olmasına dikkat edilmesi de yapay paneldeki değişkenliğin maksimum olmasına ve kesin tahminler elde edilmesine yardımcı olmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 40).

HETEROJEN PANEL VERİ MODELLERİ

Panel verilerle çalışılırken sabit ve eğim parametrelerinin birimlere ve zamana göre değişmediği (homojen olduğu) *klasik model* ve sabit parametrenin sadece birimlere ya da hem birimlere hem de zamana göre değiştiği sırasıyla *sabit parametresi heterojen tek ve iki yönlü panel veri modellerinin* tahmin yöntemleri temel panel veri kitaplarında yer almaktadır. Sabit parametrenin yanısıra eğim parametresinin de sadece birimlere ya da hem birimlere hem de zamana göre değiştiği *heterojen panel veri modelleri* (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 65):

$$Y_{it} = \beta_{0i} + \sum_{k=1}^K \beta_{ki} X_{kit} + u_{it} \quad (i=1, \dots, N) \quad (t=1, \dots, T)$$

$$Y_{it} = \beta_{0it} + \sum_{k=1}^K \beta_{kit} X_{kit} + u_{it} \quad (i=1, \dots, N) \quad (t=1, \dots, T)$$

İlk model tüm parametreleri sadece birimlere ve ikinci model tüm parametreleri hem birimlere hem de zamana göre heterojen olan modellerdir.

Tüm Parametreleri Birimlere Göre Heterojen Panel Veri Modelleri

Heterojen paneller için geliştirilmiş tahmin yöntemleri, birimler arası korelasyon (yatay kesit bağımlılık) olup olmaması durumuna göre sınıflandırılabilir.

Heterojen Panel Veri Modellerinin Homojenlik Varsayımı ile Tahmini

Birim ve zaman etkisi yoksa klasik model (havuzlanmış en küçük kareler yöntemi) sabit parametrede birim ve/veya zaman etkilerinin olduğu sabit ve tesadüfi etkiler modelleri için geliştirilen yöntemler (sabit etkiler modeli için grup içi tahminci ya da gölge değişkenli en küçük kareler tahmincisi, tesadüfi etkiler modeli için geliştirilmiş en küçük kareler ya da en çok olabilirlik) heterojen panel veri modellerinin tahmini için kullanılabilir. Ayrıca birim ortalamaları ya da zaman ortalamaları ile en küçük kareler yöntemi ile (gruplar arası tahminci) tahmin edilebilir² (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 66-72).

Maddala, Trost, Li ve Joutz (1997) ve Robertson ve Symons (1992) heterojen parametrelerin homojenlik varsayımıyla tahminlerinde ciddi sapmalar görüleceğini ve katsayı işaretlerinin de yanlış olacağını belirtmişlerdir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 72).

² Tüm yöntemler için detaylı bilgi için bkz. F. Yerdelen Tatoğlu, "Panel Veri Ekonometrisi: Stata Uygulamalı", "3. Bölüm Tek Yönlü Birim Etkili Panel Veri Modelleri ve Tahmin Yöntemleri", 7. Baskı, 2023, Beta Basım Yayın AŞ, İstanbul.

Pesaran ve Smith (1995) ise birim ve zaman ortalamalarının regresyonları, sabit ve tesadüfi sabitler tahmincileri ve kendi türettikleri ortalama grup tahmincisini karşılaştırmışlar; T küçükken (N büyük olsa bile) tüm süreçlerin tutarsız tahminler ürettiğini bulmuşlardır. T büyük olsa bile, ilk üç tahmincinin sapmalı olduğunu ifade etmişlerdir; ortalama grup tahmincisinin ise tutarlı tahminciler ürettiğini göstermişlerdir. Bu tahminci literatüre, Pesaran ve Smith'in (1995) "ortalama grup tahmincisi" olarak girmiştir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 73-74).

Heterojen ve Birimler Arası Korelasyonsuz Panel Veri Modellerinin Tahmini Ortalama Grup (MG) Tahmincisi

T'nin büyük olduğu durumda, Pesaran ve Smith (1995) tarafından önerilen ortalama grup tahmincisi (MG) tutarlıdır ve heterojen panellerin tahmininde en çok kullanılan tahmincidir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 74-75).

Ortalama grup tahmincinin elde edilmesinde, ilk aşamada her bir birimin T adet gözlemi kullanılarak, parametreler en küçük kareler yöntemi ile tahmin edilmekte $(\hat{\beta}_i)$ ve daha sonra bu bireysel tahmincilerin ortalamaları alınarak β 'nin ortalama değerlerinin tahmincilerine ulaşılabilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 75):

$$\hat{\beta}_{MG} = N^{-1} \sum_{i=1}^N \hat{\beta}_i$$

Parametre varyansları (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 75):

$$\hat{\Delta}_{\hat{\beta}} = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (\hat{\beta}_i - \hat{\beta})^2$$

Pesaran ve Smith (1995) ortalama grup tahmincinin $T \rightarrow \infty$, $N \rightarrow \infty$ ve $\sqrt{N}/T \rightarrow 0$ durumunda tutarlı olduğunu belirtmişlerdir. Hsiao, Pesaran ve Tahmiscioglu (1999), T'nin çok küçük olduğu durumda ortalama grup tahmincisinde ciddi sapmalar olacağını ispatlamışlardır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 75).

Swamy'nin Tesadüfi Katsayılar (RC) Modeli

Tesadüfi katsayılar modeli, Hildreth ve Houck (1968), Johnston (1984) ve Swamy (1971) tarafından ele alınmış bir model olup Swamy (1971) tarafından geliştirilmesi sebebiyle Swamy'nin tesadüfi katsayılar modeli olarak bilinmektedir. Heterojen parametrelerin hata terimi gibi tesadüfi olduğu varsayımı altında kullanılmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 82). Gözlemler zaman boyutuna göre kümelenildiğinde statik heterojen regresyon modeli:

$$Y_i = \beta_i X_i + u_i$$

Sabit parametreyi de içeren β parametresi birimlere göre değişmektedir.

Burada:

$$\beta_i = \beta + v_i \quad E(v_i) = 0 \quad E(v_i v_i') = \Sigma$$

v_i “heterojenlik sapması” ismini almaktadır. Amaç $\hat{\beta}$ ’yı ve hata teriminin varyans kovaryans matrisi $\hat{\Sigma}$ ’yı bulmaktır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 82).

$$Y_i = \beta_i X_i + u_i = (\beta + v_i) X_i + u_i = \beta X_i + (X_i v_i + u_i) = \beta X_i + \omega_i$$

Burada $\omega_i (= X_i v_i + u_i)$ modelin hata terimidir ve $E(\omega_i) = 0$ ’dır. Varyansı ise:

$$E(\omega_i \omega_i') = E\left\{(X_i v_i + u_i)(X_i v_i + u_i)'\right\} = E(u_i u_i') + X_i E(v_i v_i') X_i' = \sigma_i^2 I + X_i \Sigma X_i' = \Pi_i$$

Birime özgü katsayılar β_i için varyans kovaryans matrisi şöyle yazılabilmektedir:

$$Var - Kov(\beta_i) = V_i + \Sigma = (X_i' X_i)^{-1} X_i' \Pi_i X_i (X_i' X_i)^{-1}$$

Burada $V_i = \sigma_i^2 (X_i' X_i)^{-1}$ ’dir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 82).

Birimlere özgü varyans kovaryans matrisi kullanılarak, birimlere özgü katsayı tahminlerinin ağırlıklı ortalaması aşağıdaki gibi hesaplanabilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 83):

$$\hat{\beta} = \sum_{i=1}^m W_i \beta_i$$

W_i tartıdır ve aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$W_i = \left\{ \sum_{i=1}^m (\Sigma + V_i)^{-1} \right\}^{-1} (\Sigma + V_i)^{-1}$$

Genelleştirilmiş en küçük kareler tahmincisi şöyle de gösterilebilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 83):

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= (X' \Pi^{-1} X)^{-1} X' \Pi^{-1} Y \\ &= \left(\sum_i X_i' \Pi_i^{-1} X_i \right)^{-1} \sum_i X_i' \Pi_i^{-1} Y_i \end{aligned}$$

Genelde Σ ve V_i bilinmemekte, yerine tahminleri kullanılmaktadır.

Tesadüfi katsayılar modeli T’nin büyük olduğu durumda tutarlı tahminçiler vermektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 84).

Heterojen ve Birimler Arası Korelasyonlu Panel Veri Modellerinin Tahmini

Heterojen panel veri modellerinde birimler arası korelasyon olması durumunda görünürde ilişkisiz regresyon (SUR) tipi tahminçiler ya da ortak faktörler yardımıyla birimler arası korelasyonu kontrol eden tahminçilerin kullanılması uygundur (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 87).

Görünürde İlişkisiz Regresyon (SUR)

Heterojen panel veri modellerinde birimler arası korelasyon varsa, görünürde ilişkisiz regresyon modeli yardımıyla sistem çözümü mümkün hale gelmektedir. Heterojen parametrelerin sabit olduğu varsayılıyorsa uygun bir tahmin yöntemi olarak düşünülmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 87).

Görünürde ilişkisiz regresyon tahmini yapılabilmesi için öncelikle her bir birim için ayrı ayrı regresyon modeli tahmin edilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 87):

$$Y_i = X_i\beta_i + u_i$$

Daha sonra, tahminde kullanılacak genel varyans-kovaryans matrisi (Ω) oluşturulmaktadır. Ω matrisinin köşegen elemanları, her bir birim için ayrı ayrı kurulan regresyon modellerinin kalıntı varyanslarını, köşegen dışı elemanlar ise kalıntılar arasındaki kovaryansı göstermektedir. Böylece SUR modelinin tahmini (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 88):

$$\hat{\beta} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1} X'\Omega^{-1}Y$$

SUR tahmincisinin, T'nin büyük $N \leq 10$ olduğu durumda uygun olduğu belirtilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 88).

Ortak Korelasyonlu Etkiler (CCE) Tahmincisi ve Ortak Korelasyonlu Etkiler Ortalama Grup (CCEMG) Tahmincisi

Pesaran (2006), N ve T sonsuza gittiği durumda çok faktörlü kalıntı modeli önermiş, faktörleri gözlenen ve gözlenemeyen ortak faktörler olmak üzere sınıflamış ve tutarlı ve asimptotik normal parametre tahminçileri üretmiştir. Böylece, ortak etkilerin birimler üzerinde farklı etkileri olmasına ve aynı zamanda ortak faktörler ile bağımsız değişkenler arasında korelasyon derecesinin değişmesine izin verilmiştir. Ayrıca, önerdiği yöntem birimlere özgü kalıntının otokorelasyonlu ve heteroskedastik olduğu ve birim etkilerin birimlere göre özdeş ve bağımsız dağılımlı olmadığı durumda da kullanılabilir. Birim etki ve ortak faktörlerin durağan ve dışsal olduğu varsayılmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 91-92).

Ortak korelasyonlu etkiler tahmincisi, gözlenemeyen ortak faktörlerin farklı etkilerini ortadan kaldırmak için regresyon bağımlı ve bağımsız değişkenlerin yatay kesit

ortalamaları ($\bar{Y}_t$ ve $\bar{X}_t$) ile genişletilmekte ve model EKK yöntemi ile tahmin etmektedir. Bu süreç kullanılarak iki farklı fakat ilişkili tahmin yapılmaktadır: Birincisi birimlere özgü modellerden elde edilen parametreler, diğeri birimlere özgü modellerden tahmin edilen parametrelerin ortalamalarıdır. Bu tahminci, ortak korelasyonlu etkiler (CCE) olarak adlandırılmaktadır. CCE tahmincisi N, T sonsuza giderken tutarlıdır, dolayısıyla $\sqrt{T} / N \rightarrow 0$ iken CCE tahmincisinin asimptotik dağılımı türetilmektedir. Birimlere özgü CCE tahmincilerin ortalama grup tahmincisi (CCEMG) N sonsuza giderken (T sonlu ya da sonsuza giderken) asimptotik olarak sapmasızdır. Benzer sonuçlar, CCE tahmincisinin standart havuzlanmış versiyonu (CCEP) için de elde edilmektedir. Küçük örneklerde CCEP tahmincisinin, CCEMG'den biraz daha iyi performans sergilediği bilinmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 92).

Genişletilmiş Ortalama Grup (AMG) Tahmincisi

Eberhardt ve Teal (2010), Eberhardt ve Bond (2009) tarafından türetilen genişletilmiş ortalama grup tahmincisi, Pesaran'ın CCEMG tahmincisine bir alternatiftir. AMG tahmincisinde, birimlere özgü regresyonlarda ortak dinamik sürecin içerilmesi yoluyla yatay kesit bağımlılık hesaba katılmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 1).

Bu sürecin ilk aşamasında, birinci farkları alınmış havuzlanmış regresyon (FD-OLS) T-1 adet zaman gölge değişken katsayıları ile genişletilmekte ve bu katsayıların tahminleri elde edilmektedir:

$$\Delta Y_{it} = b' \Delta X_{it} + \sum_{t=2}^T c_t \Delta D_t + e_{it} \Rightarrow \hat{c}_t \equiv \hat{\mu}_t^*$$

İkinci aşamada, $\hat{\mu}_t^*$, birimlere özgü regresyonların her birinde içerilmekte ve modeller tahmin edilmektedir:

$$Y_{it} = a_i + b_i' X_{it} + c_i t + d_i \hat{\mu}_t^* + e_{it}$$

Alternatif olarak, $\hat{\mu}_t^*$ 'in bağımlı değişkenden farkı alınmaktadır.

Üçüncü aşamada ise, her iki durumda da genişletilmiş ortalama grup tahmincisi, Pesaran ve Smith'in (1995) MG yaklaşımı kullanılarak elde edilmektedir:

$$\hat{b}_{AMG} = N^{-1} \sum_i \hat{b}_i$$

Eberhardt ve Bond (2009) tarafından yapılan simülasyonlar, AMG tahmincisinin CCE tahmincisine benzer asimptotik özelliklerine sahip olduğunu göstermiştir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 96-97).

Tüm Parametreleri Birimlere ve Zamana Göre Heterojen Panel Veri Modelleri

Heterojen parametreler iki boyuta göre de değeriylorsa, bir başka ifade ile model birim etkiler yanında zaman etkilerinin de mevcut olduğu iki yönlü heterojen model ise aşağıdaki gibi yazılabilmektedir:

$$Y_{it} = \sum_{k=1}^K (\bar{\beta}_k + \alpha_{ki} + \lambda_{kt}) X_{kit} + u_{it} \quad i=1, \dots, N \quad t=1, \dots, T$$

Burada $\bar{\beta}_k$ genel eğim parametresini, α_{ki} birimlere göre farklılaşmayı ve λ_{kt} ise zamana göre farklılaşmayı göstermektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 102-103).

α_k ve λ_k 'nın $\bar{\beta}$ gibi sabit olduğu varsayılıyorsa sabit etkiler modeli; $\bar{\beta}$ sabitken α_k ve λ_k 'nın tesadüfi olduğu varsayılıyorsa tesadüfi etkiler modeli söz konusu olmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 103-108).

Heterojen Panel Veri Modelleri İçin Testler

Homojenlik Testleri

Parametrelerin homojenliğinin tespiti için F, Wald, S ve Δ testleri gibi literatürde kullanılan birçok homojenlik testi vardır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 108).

F Testi

Bu test, klasik modelin heterojen panel veri modeline karşı geçerliliğini test etmek için kullanılmaktadır. Genel anlamda, verinin birimlere göre farklılık gösterip göstermediği sınanmaktadır, veri birimlere göre farklılık göstermiyorsa klasik model uygundur. Bu amaçla, iki tür model kullanılmaktadır: Kısıtlı model ve kısıtsız model. Kısıtsız modelde, değişkenlere ait verinin birimlere göre farklılaştığı; kısıtlı modelde ise, birim farklılıklarının önemli olmadığı varsayımı yapılmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 108).

Kısıtsız model:

$$Y_i = X_i \beta_i + u_i \quad i=1, \dots, N$$

Kısıtlı model;

$$Y = X\beta + u$$

Sınanacak hipotez:

$$H_0: \beta_i = \beta$$

H_0 hipotezi reddedilemezse; $\beta_i = \beta$ 'dir.

F istatistiği:

$$F = \frac{(RRSS - URSS)/K(N-1)}{URSS/N(T-K)}$$

Burada *RRSS*: “Kısıtlı Kalıntı Kareler Toplamı” ve *URSS*: “Kısıtsız Kalıntı Kareler Toplamı”dır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 109).

H_0 hipotezini test etmek için, $[K(N-1), N(T-K)]$ serbestlik dereceli F dağılımından yararlanılmaktadır. Kısıtlı F testi için H_0 hipotezi reddedilirse, parametrelerin heterojen olduğu bir başka ifade ile klasik modelin uygun olmadığı anlaşılabacaktır. H_0 hipotezinin reddedilememesi ise klasik modelin geçerli olduğu anlamına gelmemekte, sabit parametrenin heterojenliği (sabit parametrede birim etkinin varlığı) ayrıca sınanmalıdır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 110-111).

Swamy’nin S Testi

Tesadüfi katsayılar modelini test etmek için sadece sabit parametresi heterojen sabit etkiler tahmincileri ile birimlere özgü en küçük kareler tahmincilerinin ağırlıklı ortalama matrisleri arasındaki farka bakılabilmektedir. Temel hipotez parametrelerin homojen olduğunu ifade etmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 111).

$$H_0: \beta_i = \beta$$

Swamy (1971) tarafından türetilen ve Hausman (1978) türü bir test olan bu testte istatistik:

$$\hat{S} = \chi^2_{k(N-1)} = \sum_{i=1}^N (\hat{\beta}_i - \bar{\beta}^*)' \hat{V}_i^{-1} (\hat{\beta}_i - \bar{\beta}^*)$$

Burada, $\hat{\beta}_i$ birimlere göre regresyonlardan elde edilen tahminciler, $\bar{\beta}^*$, ağırlıklı sabit etkiler tahmincisi ve $\hat{V}_i$ ise iki tahmincinin varyansları arasındaki farkı ifade etmektedir. Test istatistiği, $K(N-1)$ serbestlik derecesi ile χ^2 dağılımına sahiptir. Test istatistiği kritik değerden büyükse, parametrelerin heterojen olduğu sonucuna varılmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 111-112).

Pesaran ve Yamagata’nın Δ Testi

Eğim parametrelerinin homojenliğini sınamak için Pesaran ve Yamagata’nın (2008) önerdiği Δ testi kullanılabilmektedir. Temel hipotez eğim parametrelerin homojen olduğunu ifade etmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 112):

$$H_0: \beta_i = \beta$$

Δ test istatistiği:

$$\Delta = \sqrt{N} \left(\frac{N^{-1} \hat{S} - k}{\sqrt{2k}} \right)$$

Burada, $\hat{S}$, Swamy'nin S istatistiğidir. H_0 hipotezi altında $\Delta \sim N(0,1)$ 'dir. Test istatistiği kritik değerden büyükse, eğim parametrelerin heterojen olduğu sonucuna varılmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 112).

Birimler Arası Korelasyonun Testleri

Breusch-Pagan Lagrange Çarpanı Testi

Bu testte, tüm yatay kesit birimlerin kalıntılarına ait korelasyon matrisinin birim matris olduğu hipotezi, bir başka ifade ile birimler arası korelasyonsuzluk temel hipotezi sınanmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 113).

Lagrange Çarpanı (LM) test istatistiği:

$$\lambda_{LM} = T \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \hat{\rho}_{ij}^2$$

Burada $\hat{\rho}_{ij}^2$: i, j. kalıntının (i. ve j. birimlerin kalıntıları arasındaki) korelasyon katsayısıdır:

$$\hat{\rho}_{ij} = \hat{\rho}_{ji} = \frac{\sum_{t=1}^T \hat{v}_{it} \hat{v}_{jt}}{\left(\sum_{t=1}^T \hat{v}_{it}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{t=1}^T \hat{v}_{jt}^2 \right)^{1/2}}$$

LM test istatistiği, d ($d=N(N-1)/2$) serbestlik derecesi ile χ^2 dağılmaktadır. Test istatistiği, kritik değerden büyükse birimler arasında korelasyon vardır. Testin N'in küçük, T'nin büyük olduğu durumda kullanımı uygundur (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 113-114).

CD Testi

Pesaran (2004), birimler arası korelasyonu test etmek amacıyla önerdiği testte regresyon kalıntıları kullanılmaktadır. Her bir birimin kendisi dışında kalan tüm birimlerle korelasyonu hesaplanmaktadır, dolayısıyla N birim boyutu iken $N \times N-1$ adet korelasyon hesaplanmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 114). Hipotezler:

$H_0: \rho_{ij}=0$

$H_1: \rho_{ij} \neq 0$

Burada ρ_{ij} : i, j. kalıntının (i. ve j. birimlerin kalıntıları arasındaki) korelasyon katsayısını ifade etmektedir. Pesaran birimler arası korelasyonu test etmek üzere aşağıdaki test istatistiklerini önermiştir.

Dengeli panel için:

$$CD = \sqrt{\frac{2T}{N(N-1)}} \left(\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \hat{\rho}_{ij} \right)$$

Dengesiz panel için:

$$CD = \sqrt{\frac{2}{N(N-1)}} \left(\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \sqrt{T_{ij}} \hat{\rho}_{ij} \right)$$

Burada $\hat{\rho}_{ij}$:

$$\hat{\rho}_{ij} = \hat{\rho}_{ji} = \frac{\sum_{t=1}^T e_{it} e_{jt}}{\left(\sum_{t=1}^T e_{it}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{t=1}^T e_{jt}^2 \right)^{1/2}}$$

e_{it} ise her birimden uygun yöntemle tahmin edilen kalıntılardır. T_{ij} korelasyon katsayısı hesaplanan gözlem sayısıdır. Birimler arası korelasyon olmadığını ifade eden H_0 hipotezi altında, $T_{ij} > 3$ ve N yeterince büyükse, bu istatistik standart normal dağılıma sahiptir. Bu testin durağan olmama, yapısal kırılma ve heterojenlik durumlarında küçük örneklerde performansının iyi olduğu gösterilmiştir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 114-115).

NLM Testi

Pesaran, Ullah ve Yamagata (2008), N küçük ve T yeterince büyük iken geçerli olan N sonsuza giderken uygun olmayan Breusch Pagan (1980) LM testini, N ile T 'nin büyük olduğu durum için uyarlamışlardır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 116).

NLM test istatistiği:

$$NLM = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N (T \hat{\rho}_{ij}^2 - 1)$$

H_0 hipotezi altında sırasıyla T ardından N sonsuza giderken $NLM \sim N(0,1)$ 'dir.

Bu testin N büyük T küçük iken güç kaybına uğradığı tespit edildiğinden, testin ortalama ve ortalama-varyans sapması düzeltilmiş versiyonları da Pesaran, Ullah ve Yamagata (2008) tarafından elde edilmiştir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 116).

Ortalama sapması düzeltilmiş NLM test istatistiği:

$$NLM^* = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \left((T-K) \hat{\rho}_{ij}^2 - \mu_{T_{ij}} \right)$$

Burada,

$$\mu_{T_{ij}} = E \left[(T-k) \hat{\rho}_{ij}^2 \right] = \frac{1}{T-K} \text{Tr} (M_i M_j)$$

$$M_i = I_T - H_i \quad H_i = X_i (X_i' X_i)^{-1} X_i'$$

H_0 hipotezi altında sırasıyla, T ardından N sonsuza giderken $NLM^* \sim N(0,1)$ varsayılmaktadır. NLM^* istatistiğinin ortalaması, tüm T ve N 'ler için tam olarak sıfır olarak bulunmuştur. N 'deki artış testin gücünü azaltmamakla birlikte, test istatistiğinin varyansı küçük örnek sapmasına sahiptir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 116).

Ortalama-varyans sapması düzeltilmiş NLM istatistiği³:

$$NLM^{**} = \sqrt{\frac{2}{N(N-1)}} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{(T-K) \hat{\rho}_{ij}^2 - \mu_{T_{ij}}}{v_{T_{ij}}}$$

Burada:

$$v_{T_{ij}}^2 = \text{Var} \left[(T-K) \hat{\rho}_{ij}^2 \right] = \left[\text{Tr} (M_i M_j) \right]^2 a_{1T} + 2 \text{Tr} \left[(M_i M_j)^2 \right] a_{2T}$$

$$a_{1T} = a_{2T} - \frac{1}{(T-k)^2}, \quad a_{2T} = 3 \left[\frac{(T-k-8)(T-k+2)+24}{(T-k+2)(T-k-2)(T-k-4)} \right]^2$$

H_0 hipotezi altında N sonsuza giderken tüm T 'ler için $NLM^{**} \sim N(0,1)$ 'dir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 117).

DİNAMİK PANEL VERİ MODELLERİ

Panel veri modellerinde de dinamik yapı sıklıkla kullanılmaktadır. Dinamik panel veri modelleri statik panel veri modellerinden farklı olarak, içerisinde gecikmeli değişken ya da değişkenler barındıran modellerdir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 137).

Dinamik panel veri modelleri iki grup altında incelenebilmektedir: Dağıtılmış gecikmeli panel veri modelleri ve otoregresif panel veri modelleri. Otoregresif panel

³ Pesaran M. H. 2015, "Time Series and Panel Data Econometrics", Oxford University Press, UK. kitabında LM adj testi ismiyle geçmektedir.

veri modellerinde, bağımlı değişkenin gecikmeli değerleri bağımsız değişkenler arasında yer almakta iken; dağıtılmış gecikmeli panel veri modellerinde ise, bağımsız değişkenlerin gecikmeli değerleri bağımsız değişkenler arasında yer almaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 137).

Bir gecikme ile otoregresif panel veri modeli aşağıdaki gibi gösterilebilmektedir:

$$Y_{it} = \delta Y_{it-1} + \beta X'_{it} + \mu_i + u_{it}$$

Burada bağımlı değişkenin bir gecikmeli değeri modelde bağımsız değişken olarak yer almaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 137).

Genel olarak dinamik modellerde, geçmiş şoklar sebebiyle Y_{it-1} 'nin u_{it} ile korelasyonlu olduğu bilinmektedir. Panel veri modellerinde buna ilaveten, Y_{it} , μ_i 'nin bir fonksiyonu olduğundan, Y_{it-1} de μ_i 'nin bir fonksiyonudur. Dolayısıyla Y_{it-1} , μ_i 'yi de içeren hata terimi ile korelasyonlu olmaktadır. Bu durumlarda da katı dışsallık varsayımı bozulmakta, tahminciler sapmalı ve tutarsız olmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 138).

Dinamik Panel Veri Modellerinin Tahmin Yöntemleri

Havuzlanmış En Küçük Kareler Tahmincisi

Dinamik panel veri modelleri Havuzlanmış En Küçük Kareler yöntemi ile tahmin edilebilir. Fakat modelde bağımsız değişken olan Y_{it-1} ile hata terimi arasındaki korelasyon, katı dışsallık varsayımını bozmaktadır. Bu durumda u_{it} otokorelasyonsuz olsa bile, havuzlanmış en küçük kareler yöntemi ile sapmalı ve tutarsız tahminler elde edilmektedir⁴ (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 138).

Balestra ve Nerlove İki Aşamalı En Küçük Kareler Tahmincisi

Gecikmeli bağımlı değişken ile hata terimi arasındaki korelasyon, araç değişken kullanımı ile kontrol edilebilmektedir. Araç değişken seçimi konusunda çeşitli yaklaşımlar mevcuttur ve genel olarak seçilen araç değişkenler şu şartları sağlamalıdır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 139-140):

- Araç değişkenler hata terimleri ile korelasyonsuz olmalıdır,
- Araç değişkenler yerine geçecekleri değişken ile yüksek korelasyonlu olmalıdır.

Balestra ve Nerlove'un (1966) İki Aşamalı En Küçük Kareler Tahmincisini elde etmek için, öncelikle panel veri modeli uygun araç değişkenler kullanılarak

⁴ Havuzlanmış en küçük kareler yöntemi ile ilgili detaylı bilgi için bkz. F. Yerdelen Tatoğlu, "Panel Veri Ekonometrisi: Stata Uygulamalı", "2. Bölüm Doğrusal Panel Veri Modelleri ve Tahmin Yöntemleri", 6. Baskı, 2022, Beta Basım Yayın AŞ, İstanbul.

dönüştürülmekte ve daha sonra dönüştürülmüş değişkenler kullanılarak model Havuzlanmış En Küçük Kareler yöntemi ile tahmin edilmektedir.

Balestra ve Nerlove (1966), bağımlı değişkenin gecikmeli değerlerinin araç değişken olarak kullanılmasını önermişlerdir. Z araç değişken matrisini göstermek üzere dinamik panel veri modeli aşağıdaki gibi dönüştürülmekte:

$$ZY = \delta ZX + Zu$$

Daha sonra Havuzlanmış En Küçük Kareler yöntemi ile tahmin edilmektedir:

$$\hat{\delta} = (X'Z(Z'Z)^{-1}Z'X)^{-1}X'Z(Z'Z)^{-1}Z'Y$$

Bu tahminci dinamik modellerde içsellik problemi nedeniyle meydana gelen sapmayı azaltmaktadır. Ancak birim etkinin varlığını göz ardı ettiği için sapmalıdır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 140).

Tesadüfi Etkiler Tahmincisi

Hata terimi içerisinde yer alan birim etkinin bağımsız değişkenlerden birisi (Y_{it-1}) ile korelasyonlu olması, tesadüfi etkiler modelinin önemli varsayımlarından birisini ihlal etmektedir. Bu nedenle, dinamik modelin tesadüfi etkiler varsayımıyla tahmini tutarsızdır⁵ (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 142).

Sabit Etkiler Tahmincisi

Dinamik panel veri modellerinde Y_{it-1} sebebiyle her bir birimin ilk döneminin kaybedilmiş olduğu ve modele birim sayısından bir eksik sayıda gölge değişken ilave edildiği düşünüldüğünde, tutarlılık ancak T sonsuza giderse sağlanabilmektedir. Nickell (1981), otoregresif panel veri modelleri ile çalışılırken gölge değişkenli en küçük kareler tahmincisinin N büyük ve T küçükken tutarsız olduğunu göstermiştir, bu durum literatürde “*dinamik panel sapması*” ya da “*Nickell sapması*” olarak bilinmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 143).

Parametre tahminlerinin tutarsızlığına rağmen, Monte Carlo simülasyonları (Arelano ve Bond (1991), Kiviet (1995) ve Judson ve Owen (1999)) varyansın diğer tahmincilere kıyasla daha düşük olduğunu göstermiştir. Bu nedenle, otoregresif panel veri modelini parametre tahminlerini düzelterek gölge değişkenli en küçük kareler yöntemi ile tahmin etmeye çalışmak popüler hale gelmiştir. Kiviet (1995, 1999), daha sonra Bun ve Kiviet (2003) ve Bruno (2005a) N’in büyük T’nin küçük olduğu durumda, gölge değişkenli en küçük kareler tahmini sonucu ortaya çıkan

⁵ Tesadüfi etkiler modeli ile ilgili detaylı bilgi için bkz. F. Yerdelen Tatoğlu, “Panel Veri Ekonometrisi: Stata Uygulamalı”, “3. Bölüm Tek Yönlü Birim Etkiler Panel Veri Modelleri ve Tahmin Yöntemleri, 6. Baskı, 2022, Beta Basım Yayın AŞ, İstanbul.

dinamik panel sapması için bir düzeltme önermişler ve dengesiz paneller için de genişletmişlerdir. Monte Carlo simülasyonları, küçük örneklerde “*Sapması Düzeltilmiş Gölge Değişkenli En Küçük Kareler Tahmincisi*”nin diğer tahmincilerden daha tutarlı olduğunu göstermiştir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 143-144).

Bu yöntemde göre model iki aşamada tahmin edilmektedir: Birinci aşamada otoregresif panel veri modeli gölge değişkenli en küçük kareler (grup içi) tahmin yöntemi ile tahmin edilmekte ve ikinci aşamada, parametreler düzeltilmektedir. Düzeltme için Nickell $O(1/T)$, Kiviet (1999) $O(1/NT)$ ve Bun ve Kiviet (2003) $O(1/NT^2)$ oranlarını önermişlerdir⁶. Parametreleri düzeltilmiş modelde standart hataların hesaplanabilmesi için bootstrap varyans kovaryans matrisinden hareket edilmektedir. Bu durumda başlangıç değeri olarak Anderson ve Hsiao (1982), Arellano ve Bond (1995) ve Blundell ve Bond (1998) tutarlı tahmincileri kullanılabilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 144).

Birinci Farklara Dayalı Tahminciler

Bu yöntemde yapılan birinci fark dönüşümü ile birim etki μ_i modelden düşmektedir, fakat gecikmeli bağımlı değişken içsel olduğundan sapmalı tahminler elde edilmektedir. Bu nedenle birinci fark dönüşümü yapıldıktan sonra, gecikmeli bağımlı değişken ve hata terimi arasındaki korelasyonun araç değişken kullanımı ile kontrol edilmesi önerilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 148).

Anderson ve Hsiao Tahmincisi

Bu yöntemde, dinamik panel veri modelinin öncelikle birinci farkları alınmakta, daha sonra Y_{it-2} ya da ΔY_{it-2} gibi bir değişken, hata terimi ile korelasyonlu olan ΔY_{it-1} bağımsız değişkeni yerine araç değişken olarak kullanılmaktadır. Dışsalılık sağlanamazsa farklı araç değişkenler de denenebilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 148-149).

Dinamik panel veri modeli aşağıdaki gibi ifade edildiğinde:

$$Y_{it} = \gamma Y_{it-1} + \beta X'_{it} + \mu_i + u_{it}$$

Bu modelin birinci farkı aşağıdaki gibidir

$$\begin{aligned} Y_{it} - Y_{it-1} &= \gamma(Y_{it-1} - Y_{it-2}) + \beta(X'_{it} - X'_{it-1}) + (u_{it} - u_{it-1}) \\ \Delta Y_{it} &= \delta \Delta X_{it} + \Delta u_{it} \end{aligned}$$

⁶ “O” sapma yakınsama hızıdır. Detaylı bilgi için bkz. Bruno G. S., 2005a, “Approximation the Bias of the LSDV Estimator for Dynamic Unbalanced Panel Data Models”, *Economic Letters*, 87 (3), 361-366.

Burada $\Delta X_{it} = [(Y_{it-1} - Y_{it-2}), (X'_{it} - X'_{it-1})] = [\Delta Y_{it-1}, \Delta X'_{it}]$ ve $\Delta Y_{it} = (Y_{it-1} - Y_{it-2})$ tanımlamaları kullanılmıştır. Yapılan dönüşümle birim etki ve sabit parametre modelden düşmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 148-149).

Gecikmeli bağımlı değişken olan bağımsız değişken hata terimi ile korelasyonludur. Bağımsız değişkenleri $\Delta X_{it} = [(Y_{it-1} - Y_{it-2}), (X'_{it} - X'_{it-1})] = [\Delta Y_{it-1}, \Delta X'_{it}]$ temsil etmek için, aşağıdaki araç değişkenlerden bir tanesi kullanılarak model havuzlanmış en küçük kareler yöntemi ile tahmin edilmektedir:

$$Z = [Y_{it-2}, (X'_{it} - X'_{it-1})] = [Y_{it-2}, \Delta X'_{it}]$$

$$Z = [(Y_{it-2} - Y_{it-3}), (X'_{it} - X'_{it-1})] = [\Delta Y_{it-2}, \Delta X'_{it}]$$

Arellano (1989) dinamik panel veri modelleri ile ilgili yaptığı çalışmada, Y_{it-2} 'nin ΔY_{it-2} 'den daha uygun bir araç olduğunu ispatlamıştır. Ayrıca araç değişken olarak Y_{it-2} kullanılırsa, iki dönem; ΔY_{it-2} kullanılırsa, üç dönem kaybı olacaktır. Yine de kullanılan araç değişkenin geçerliliği sınanmakta, eğer uygun değilse farklı araç değişkenler denenmelidir. Birinci fark alınmış araç değişkenli model için havuzlanmış en küçük kareler tahmincisi, aşağıdaki gibi ifade edilebilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 149):

$$\hat{\delta} = (\Delta X'Z(Z'Z)^{-1}Z'\Delta X)^{-1} \Delta X'Z(Z'Z)^{-1}Z'\Delta Y$$

Anderson ve Hsiao'nun (1982) tahmincisi tutarlı tahminciler üretmektedir, fakat tüm moment koşullarının kullanılmaması ve kalıntının fark alınmış yapısından kaynaklı otokorelasyon problemi dikkate alınmadığı için etkin değildir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 150).

Arellano ve Bond Genelleştirilmiş Momentler Tahmincisi

Birinci fark hata terimleri otokorelasyonlu ki çoğu zaman negatif otokorelasyonludur, bu durumda Arellano ve Bond'un (1991) Genelleştirilmiş Momentler (GMM) tahmincisinin kullanımı uygun olacaktır. Bu yöntemde gecikmeli bağımlı değişkeni tek bir araç değişken ile ifade etmek yerine bir araç değişken seti ile temsil etme imkânı bulunmaktadır.

İlk aşamada, birinci fark modeli araç değişken matrisi kullanılarak dönüştürülmekte ve daha sonra bu dönüştürülmüş model genelleştirilmiş en küçük kareler yöntemi ile tahmin edilmektedir. Bu nedenle genelleştirilmiş momentler tahmincisi, “iki aşamalı araç değişkenler tahmincisi” olarak da bilinmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 154).

Bağımlı değişkenin gecikmeli değerinden başka açıklayıcı değişkeni olmayan dinamik panel veri modeli aşağıdaki gibi gösterildiğinde:

$$Y_{it} = \gamma Y_{it-1} + \mu_i + u_{it}$$

Bu modelin birinci farkı alınmakta ve birim etli elimine edilmektedir:

$$Y_{it} - Y_{it-1} = \gamma(Y_{it-1} - Y_{it-2}) + (u_{it} - u_{it-1})$$

Y_{it-1} ile u_{it-1} korelasyonlu olduğundan birinci farklar tahmincisi aşağıya doğru sapmalıdır. Ayrıca hata terimi ($u_{it}-u_{it-1}$), MA(1) birim köklüdür.

Araç değişkenler matrisi aşağıdaki gibidir:

$$Z_i = \begin{bmatrix} Y_{i1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & Y_{i2} & Y_{i1} & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & Y_{i3} & Y_{i2} & Y_{i1} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Araç değişken sayısı $((T-1)(T-2))/2 + BDS$ kadardır (BDS: bağımsız değişken sayısı).

Gecikmeli değerin dışında bağımsız değişkeni de olan araç değişkenli birinci fark modeli matrislerle genel olarak aşağıdaki gibi gösterilmektedir:

$$Z'\Delta Y = \delta Z'\Delta X + Z'\Delta u$$

Burada $\Delta X = [(Y_{it-1} - Y_{it-2}), (X_{it} - X_{it-1})] = [\Delta Y_{it-1}, \Delta X_{it}]$ eşitliği vardır. Genelleştirilmiş moment (GMM) tahmincisi ise, matrislerle aşağıdaki gibi tahmin edilmektedir:

$$\hat{\delta}_{GMM} = \left(\Delta X' Z (Z' \hat{\Omega} Z)^{-1} Z' \Delta X \right)^{-1} \left(\Delta X' Z (Z' \hat{\Omega} Z)^{-1} Z' \Delta Y \right)$$

Burada, $\hat{\Omega}$ hata terimlerinin varyans kovaryans matrisidir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 154-155).

N'in küçük T'nin büyük olduğu ya da N'in yeterince büyük olmadığı durumlarda, kullanılan araç değişken sayısı T ile birlikte arttığından, N'in kullanılan araç değişken sayısını aşması söz konusu olabilmektedir. Bu durumda, GMM tahmincisi ve tahminciyi kullanarak elde edilen testler sapmalı olmaktadır. Genel kural olarak kullanılan araç değişken sayısının N'e eşit ya da ondan küçük olmasına dikkat edilmesi gerekmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 155).

Arellano ve Bover / Blundell ve Bond Sistem Genelleştirilmiş Momentler Tahmincisi

Arellano ve Bover (1995), dinamik panel veri modelleri için “ortogonal sapmalar” yöntemini kullanarak, etkin araç değişken tahmincisi önermişlerdir. Bu yöntemde, bir değişkenin tüm mümkün gelecek değerlerinin ortalamasının farkı alınmaktadır. Böylece, özellikle dengesiz panel veri setlerinde birinci farklar yönteminin doğruduğu veri kaybını minimize etmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 161). Aşağıdaki statik panel veri modelinden hareket edildiğinde:

$$Y_i = W_i\eta + v_i$$

Burada, $\eta' = (\beta', \gamma')$, $w_i = [X_i, t_T Z_i']$ ve t_T T boyutunun birim vektörüdür. Tek yönlü hata bileşenleri modeli ele alındığında kalıntı aşağıdaki gibidir:

$$v_i = \mu_i t_T + u_i$$

Genel olarak $E(v_i v_i' | w_i)$, $w_i = [X_i' Z_i']'$ ’ye kısıtsız bağımlı olacaktır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 161).

Arellano ve Bover, panel veri modelini sistem dönüşümünü kullanarak aşağıdaki gibi elde etmiştir:

$$H = \begin{bmatrix} C \\ t_T' / T \end{bmatrix}$$

Burada C, $C t_T = 0$ şartını sağlayan satır (T-1)’in herhangi bir (T-1)xT boyutlu matrisidir.

Tam dönüştürülmüş sistem için geçerli araç değişken matrisi aşağıdaki gibidir:

$$M_i = \begin{bmatrix} w_i' & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \ddots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & w_i' & \dots \\ 0 & \dots & \dots & m_i' \end{bmatrix}$$

Moment koşulu ise:

$$E(M_i' H v_i) = 0$$

Burada $\bar{H} = I_N \otimes H$ ve $\hat{\Omega} = I_N \otimes \Omega$ ’dir. Modelin $M'\bar{H}$ ile önden çarpılması ile aşağıdaki eşitlik elde edilmektedir:

$$M'\bar{H}Y = M'\bar{H}W\eta + M'\bar{H}v$$

Bu modelin genelleştirilmiş en küçük kareler yöntemi ile tahmini Arellano ve Bover Tahmincisi vermektedir. Bu durumda η aşağıdaki gibi tahmin edilmektedir:

$$\hat{\eta} = \left[M'\bar{H}'M \left(M'\bar{H}\hat{\Omega}^+ \bar{H}'M \right)^{-1} M'\bar{H}W \right]^{-1} W'\bar{H}'M \left(M'\bar{H}\hat{\Omega}^+ \bar{H}'M \right)^{-1} M'\bar{H}Y$$

Uygulamada dönüştürülmüş sistemin varyans kovaryans matrisi $\hat{\Omega}^+ = H\Omega H'$ yerine, tutarlı olan aşağıdaki tahminci kullanılmaktadır;

$$\hat{\Omega}^+ = \frac{\sum_{i=1}^N \hat{u}_i^+ \hat{u}_i^{+'}}{N}$$

Burada $\hat{u}_i^+$, tutarlı başlangıç tahmininden elde edilen kalıntıdır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 162-163).

Özet olarak iki sistemli bir eşitlik (orijinal ve dönüştürülmüş eşitlikler) kurulmakta ve birlikte sistem olarak tahmin edilmektedir. Bu nedenle tahminci “sistem GMM” olarak bilinmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 163).

Blundell ve Bond (1998), 'nin küçük olduğu dinamik panel veri modellerinde, ek moment koşullarından yararlanılarak Sistem GMM tahmincisinin etkinliğinin artırılabilirliğini göstermiştir. Sistem GMM'in Fark GMM'e göre etkinlik kazancı, otoregresif parametre bire yaklaştıkça ve hata bileşenlerinin varyansı büyüdükçe artmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 163).

Keane ve Runkle Tahmincisi

Keane ve Runkle (1992), kalıntıda genel varyans kovaryans yapısını dikkate alan ve etkin tahminciler üreten bir yöntem önermişlerdir. Bu tahmin metodu, verideki genel otokorelasyon yapısını elimine etmektedir. İlk olarak $\sum_{iA}^2$ 'nin tutarlı tahmini elde edilmektedir (İA indisi iki aşamayı ifade etmek için kullanılmıştır) ve bu Cholesky ayrıştırmasına $(\hat{P}_{iA})$ denktir. Daha sonra model $\hat{Q}_{iA} = (I_N \otimes \hat{P}_{iA})$ ile önden çarpılmakta ve orijinal araçlar kullanılarak, model iki aşamalı en küçük kareler yöntemi ile tahmin edilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 169). Bu durumda Keane ve Runkle tahmincisi aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$\hat{\beta}_{KR} = \left[X'\hat{Q}_{iA}'P_W\hat{Q}_{iA}X \right]^{-1} X'\hat{Q}_{iA}'P_W\hat{Q}_{iA}Y$$

Burada:

$$P_W = W(W'W)^{-1}W'$$

W araçlar için projeksiyon matrisidir. Bu, genel varyans kovaryans matrisine Σ_{IA} izin vermekte ve $[T(T+1)/2]$ 'yi N 'den daha küçük olmaya zorlamaktadır. Bu durum ile genelde N 'nin çok büyük T 'nin küçük olduğu durumda karşılaşılmaktadır. Tutarlı iki aşamalı en küçük kareler kalıntıları $(\hat{v}_i)$ kullanılarak elde edilmektedir:

$$\hat{\Sigma}_{IA} = \frac{\hat{V}'\hat{V}}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N \hat{v}_i \hat{v}_i'}{N}$$

Burada $\hat{V}' = [\hat{v}_1, \hat{v}_2, \dots, \hat{v}_N]$ 'dir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 169).

Birinci fark hatası MA(1) tipi birim kök ile otokorelasyonlu olduğu için birinci fark modeline Keane Runkle süreci uygulanarak etkinlik kazanılabilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 170).

Dinamik Panel Veri Modellerinde Testler

Birim Etkilerin Testi

Holtz-Eakin (1988), dinamik panel veri modellerinde birim etkilerin varlığını sınamak için moment koşullarına dayalı bir test önermiştir. Birim etkisinin olmadığı durumda ilave ortogonallik kısıtlamaları geçerli olmaktadır. Test, bu kısıtlamaların yeterince sıfıra yakın olup olmadığının sınanmasına dayanmaktadır. Elde edilen ağırlıklı kareler toplamı (AKT) istatistiği, aşırı tanımlama kısıtlaması sayısına eşit serbestlik derecesiyle dağılmaktadır. Sıfır hipotezinin reddedilmesi, modelde birim etkilerinin bulunduğunu göstermektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 171-172).

İçsellik Testleri

Modelde içsel olduğu düşünülen değişkenlerin, kullanılan araç değişkenler sonrasında dışsal hale gelip gelmedikleri test edilmelidir. Testte H_0 hipotezi “değişkenler dışsaldır” şeklinde kurulmaktadır. H_0 hipotezinin reddedilmesi değişkenlerin içsel olduğunu göstermektedir. Durbin'in score (1954) ve Wu-Hausman (Wu (1954), Hausman (1978)) testleri içsellikğin sınanması için kullanılmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 172).

Araçların Geçerliliği İçin Testler

GMM tahmininde kullanılan araç değişkenlerin geçerliği, bir başka ifade ile aşırı tanımlama kısıtlamalarının geçerli olup olmadığını sınamak için Arellano ve Bond (1991) Sargan testini önermişlerdir. Sargan'ın test istatistiği aşağıdaki gibidir:

$$s = \Delta\hat{u}Z \left(\sum_{i=1}^N Z_i' \Delta\hat{u}_i \Delta\hat{u}_i' Z_i \right)^{-1} Z' \Delta\hat{u} \sim \chi^2_{p-K-1}$$

Burada $Z_i = \text{diag}(Y_{i1}, \dots, Y_{is})$, ($s = 1, \dots, T - 2$) eşitliği vardır ve $\Delta\hat{u}$ iki aşamalı tahminden elde edilen kalıntılardır. p , Z 'nin sütun sayısı olmak üzere, s test istatistiği $p-k-1$ serbestlik derecesi ile χ^2 dağılımına uymaktadır. Modelde heteroskedasite varsa, dirençli Hansen testi kullanılabilir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 173).

Sistem GMM tahmininde modele ilave edilen araç değişkenlerin geçerliliği fark-Sargan testi ile sınanabilmektedir. Bu test, sistem GMM ile fark GMM tahminlerinden elde edilen Sargan testleri arasındaki farka dayanmaktadır. Heteroskedasite altında fark-Hansen testi kullanılmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 173).

Araç değişken sayısı çok arttığında bu testler zayıf kalmaktadır. p -değerleri 1.000'e çok yakın olmakta ya da 0.1'in altında kalmaktadır. Bu nedenle 1.000'e çok yakın veya 0.25'in altındaki p -değerleri çok güvenilir değildir⁷ (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 173).

Otokorelasyonun Testi

Arellano ve Bond (1991), dinamik panel veri modellerinde otokorelasyonu sınamak için bir test önermiştir. Test, birinci fark modelinin kalıntılarına uygulanmaktadır. Birinci farklar modelinde birinci mertebeden otokorelasyonun (AR(1)) bulunması beklenen bir durumdur ve model açısından sorun oluşturmamaktadır. GMM tahmincisinin etkinliği açısından önemli olan, ikinci mertebeden otokorelasyonun (AR(2)) olmamasıdır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 175).

İkinci mertebeden otokorelasyonun testi için, birinci farklar modelinden elde edilen kalıntılar kullanılmaktadır. H_0 hipotezi, "otokorelasyon yoktur" şeklinde kurulmaktadır. Arellano ve Bond'un otokorelasyon testi için test istatistiği:

$$m_2 = \frac{\hat{u}_{-2}\hat{u}}{\hat{u}^{1/2}} \sim N(0,1)$$

Burada $\hat{u}_{-2}$, iki kez gecikmesi alınmış kalıntıların vektörüdür. Temel hipotez reddedilemezse, ikinci mertebeden otokorelasyon yoktur (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 175).

⁷ Detaylı bilgi için bkzn. Roodman D., 2009, "How to do xtabond2: An introduction to difference and system GMM in Stata", Stata Journal, 9 (1), 86-139.

Dağıtılmış Gecikmeli Panel Veri Modelleri

Genel olarak dağıtılmış gecikmeli panel veri modeli aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$Y_{it} = \mu_i + \sum_{\tau=0}^{\infty} \beta_{\tau} X_{i,t-\tau} + u_{it}$$

Dağıtılmış gecikmeli panel veri modellerinde temel sorun, bağımsız değişken ile gecikmeli değerleri arasındaki çoklu doğrusal bağlantıdır. Panel verilerde yatay kesit birimlerinin farklılıklarından yararlanılması ve gözlem sayısının artması bu problemi azaltmakta ve klasik tahmin yöntemleriyle tahminde genellikle önemli bir sorunla karşılaşmamaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 176-177).

PANEL EŞANLI DENKLEM SİSTEMLERİ VE İÇSELLİKLE KARŞILAŞILAN DİĞER MODELLER

Bu bölümde eşanlı denklem modelleri ile görünürde ilişkisiz regresyon ve içsel ve dışsal değişkenlerin bir arada tahminlerine izin veren yöntemler tartışılacaktır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 197).

Panel Eşanlı Denklem Sistemleri ve Tahmin Yöntemleri

İktisattaki ilişkileri açıklamak için bazen tek denklem yeterli gelmemekte, birden fazla denklem kullanılarak oluşturulan bir sistem tarafından ilişkinin açıklanması ihtiyacı bulunmaktadır. Panel eşanlı denklem sistemine örnek olarak aşağıdaki iki denklem verilebilir:

$$Y_{it} = \alpha + \beta_1 X_{it} + \beta_2 Z_{it} + u_{it}$$

$$X_{it} = \lambda + \delta_1 L_{it} + \delta_2 Y_{it} + \delta_3 K_{it} + v_{it}$$

Bu denklem sisteminde Y_{it} ve X_{it} değişkenleri birbirlerini karşılıklı olarak etkilemekte ve bu değişkenlere içsel değişken denilmektedir. İki denklem birbirinden bağımsız olarak düşünülememekte ve sistem olarak ele alınmaktadır. Y_{it} ve X_{it} sistemin içsel değişkenleri ve Z_{it} , L_{it} ve K_{it} ise dışsal değişkenlerdir⁸ (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 197-198).

İki Aşamalı En Küçük Kareler Tahmincisi

İki aşamalı en küçük kareler yöntemi, eşanlı denklem sisteminin daraltılmış biçiminden elde edilen tahmin değerlerinin yapısal biçimde içsel olan değişkenler

⁸ Detaylı bilgi için bkz. F. Yerdelen Tatoğlu, “Ekonometri: Stata Uygulamalı”, “8. Bölüm Eşanlı Denklem Modelleri ve Görünürde İlişkisiz Regresyon”, 2020, Beta Basım Yayın AŞ, İstanbul.

yerine araç değişken olarak kullanılmasına dayanmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 203). Eşanlı denklem sisteminin birinci eşitliği ele alındığında:

$$Y_1 = Z_1 \delta_1 + v_1$$

Burada, $Z_1 = [Y_1, X_1]$ ve $\delta'_1 = (\gamma'_1, \beta'_1)$ 'dir. Y_1 modelin sağ tarafında yer alan içsel değişkenleri ifade etmektedir, g_1 sayıdadır ve X_1 modelin dışsal değişkenlerini ifade etmektedir, k_1 sayıdadır. $X = [X_1, X_2]$, sistemdeki tüm dışsal değişkenleri ifade etmektedir ve k_2 sayıdadır. Çözüm olabilmesi için, her bir denklemden dışlanan içsel değişkenlerin sayısı, içsel değişken sayısına (g_1) eşit ya da ondan büyük olmalıdır (sayma koşulu) (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 203).

Tek yönlü hata bileşenleri modelinden hareket edildiğinde:

$$v_1 = Z_\mu \mu_1 + u_1$$

Burada $Z_\mu = (I_N \otimes I_T)$ 'dir. $\mu'_1 = (\mu_{11}, \dots, \mu_{N1})$ ve $u'_1 = (u_{111}, \dots, u_{NT1})$ sıfır ortalama ve aşağıdaki varyans kovaryans matrisi ile tesadüfi vektörlerdir:

$$E \begin{pmatrix} \mu_1 \\ u_1 \end{pmatrix} (\mu'_1, u'_1) = \begin{bmatrix} \sigma_{\mu 11}^2 I_N & 0 \\ 0 & \sigma_{u 11}^2 I_{NT} \end{bmatrix}$$

Tesadüfi etkiler modelinin tahmini için **ilk aşamada**, aşağıdaki gibi grup içi dönüşüm yapılmaktadır:

$$QY_1 = QZ_1 \delta_1 + Qv_1$$

$$\tilde{y}_1 = \tilde{Z}_1 \delta_1 + \tilde{v}_1$$

Bu modele iki aşamalı en küçük kareler uygulandığında, grup içi iki aşamalı en küçük kareler tahmincisi (GI2AEKK) elde edilmektedir:

$$\tilde{\delta}_{1,GI2AEKK} = (\tilde{Z}'_1 P_{\tilde{X}} \tilde{Z}_1)^{-1} \tilde{Z}'_1 P_{\tilde{X}} \tilde{y}_1$$

Daha sonra gruplar arası dönüşüm yapılmaktadır:

$$PY_1 = PZ_1 \delta_1 + Pv_1$$

$$\bar{y}_1 = \bar{Z}_1 \delta_1 + \bar{v}_1$$

Bu modele iki aşamalı en küçük kareler uygulanırsa, gruplar arası iki aşamalı en küçük kareler tahmincisi (GA2AEKK) elde edilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 203-204):

$$\tilde{\delta}_{1,GA2AEKK} = (\bar{Z}'_1 P_{\bar{X}} \bar{Z}_1)^{-1} \bar{Z}'_1 P_{\bar{X}} \bar{y}_1$$

İkinci aşamada, iki dönüştürülmüş eşitlik bir sistem olarak düşünülmektedir;

$$\begin{pmatrix} \tilde{X}'_1 \tilde{y}_1 \\ \bar{X}'_1 \bar{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{X}'_1 \tilde{Z}_1 \\ \bar{X}'_1 \bar{Z}_1 \end{pmatrix} \delta_1 + \begin{pmatrix} \tilde{X}'_1 \tilde{v}_1 \\ \bar{X}'_1 \bar{v}_1 \end{pmatrix}$$

Bu eşitliğe geliştirilmiş en küçük kareler uygulandığında tesadüfi etkiler iki aşamalı en küçük kareler tahmincisi (TE2AEKK) elde edilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 205-206):

$$\hat{\delta}_{1,TE2AEKK} = \left[\frac{\tilde{Z}'_1 P_{\tilde{X}} \tilde{Z}_1}{\sigma_{u_{11}}} + \frac{\bar{Z}'_1 P_{\bar{X}} \bar{Z}_1}{\sigma_{1_{11}}} \right]^{-1} \left[\frac{\tilde{Z}'_1 P_{\tilde{X}} \tilde{y}_1}{\sigma_{u_{11}}} + \frac{\bar{Z}'_1 P_{\bar{X}} \bar{y}_1}{\sigma_{1_{11}}} \right]$$

Üç Aşamalı En Küçük Kareler Tahmincisi (Sistem Tahmini)

Tesadüfi etkiler modelinin üç aşamalı en küçük kareler tahmini için grup içi ve gruplar arası dönüşüm yapılmış modellere üç aşamalı en küçük kareler uygulanmaktadır. Daha sonra iki dönüştürülmüş eşitlik bir sistem olarak düşünülmekte ve bu sistem eşitliğine geliştirilmiş en küçük kareler uygulanarak, tesadüfi etkiler üç aşamalı en küçük kareler tahmincisi (TE3AEKK) elde edilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 219-221):

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_{1,TE3AEKK} &= \left[\tilde{Z}'_1 (\Sigma_u^{-1} \otimes P_{\tilde{X}}) \tilde{Z}_1 + \bar{Z}'_1 (\Sigma_1^{-1} \otimes P_{\bar{X}}) \bar{Z}_1 \right]^{-1} \\ &\quad \times \left[\tilde{Z}'_1 (\Sigma_u^{-1} \otimes P_{\tilde{X}}) \tilde{y}_1 + \bar{Z}'_1 (\Sigma_1^{-1} \otimes P_{\bar{X}}) \bar{y}_1 \right] \end{aligned}$$

Panel Görünürde İlişkisiz Regresyon

Bazen bir ya da birden fazla denklem birbirinden bağımsız gibi görünmesine rağmen, hata terimleri arasında korelasyon olabilmektedir ve bu korelasyon sebebiyle denklemlerin bir sistem halinde çözülmesini gerekmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 225).

Panel görünürde ilişkisiz regresyon için aşağıdaki iki denklem örnek olarak verilebilir:

$$Y_{1it} = \alpha + \beta_1 X_{1it} + \beta_2 X_{2it} + u_{1it}$$

$$Y_{2it} = \lambda + \delta_1 Z_{1it} + \delta_2 Z_{2it} + u_{2it}$$

Bu denklemlerin her birinde iki bağımsız değişken vardır ve denklemlerin gerek bağımlı ve gerekse bağımsız değişkenleri birbirleri ile aynı değildir, iki denklem birbirlerinden bağımsız görünmektedir. Fakat eğer bu iki denklemin hata terimleri

birbirleri ile ilişkili ise, iki denklem birbirinden bağımsız düşünülmemeli sistem olarak ele alınmalıdır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 225).

Tek Yönlü Görünürde İlişkisiz Regresyon

Tek yönlü görünürde ilişkisiz regresyonun tahmini için, Avery (1977) hata bileşenleri modelinden hareket etmiştir. M eşitlik seti ele alındığında,

$$Y_j = Z_j \delta_j + v_j$$

$$Y_j : NT \times 1, Z_j : NT \times k'_j, \delta'_j = (\alpha_j, \beta'_j), \beta_j : k_j \times 1 \text{ ve } k'_j = k_j + 1 \text{ ve } v_j = Z_\mu \mu_j + u_j$$

$$\text{Burada, } Z_\mu = (I_N \otimes I_T), \mu'_j = (\mu_{1j}, \mu_{2j}, \dots, \mu_{Nj}) \text{ ve } u'_j = (u_{11j}, \dots, u_{1Tj}, \dots, u_{N1j}, \dots, u_{NTj})$$

sıfır ortalama ve aşağıdaki varyans kovaryans matrisi ile tesadüfi vektörlerdir:

$$E \begin{pmatrix} \mu_j \\ u_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu'_j & u'_j \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{\mu_j}^2 I_N & 0 \\ 0 & \sigma_{u_j}^2 I_{NT} \end{bmatrix}$$

$$\Omega_{jl} = E(v_j v'_l) = \sigma_{\mu_{jl}}^2 (I_N \otimes J_T) + \sigma_{u_{jl}}^2 (I_N \otimes I_T)$$

Ω matrisi kullanılarak genelleştirilmiş en küçük kareler tahmincisi elde edilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 225-226).

Varyans bileşenlerinin tahmininde Avery (1977), havuzlanmış en küçük kareler kalıntılarının; Baltagi (1980) ise grup içi kalıntıların kullanılmasını önermiştir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 226).

İki Yönlü Görünürde İlişkisiz Regresyon

M eşitlik seti ele alındığında hata bileşenleri:

$$v_j = Z_\mu \mu_j + Z_\lambda \lambda_j + u_j$$

Varyans kovaryans matrisi aşağıdaki gibidir:

$$E \begin{pmatrix} \mu_j \\ \lambda_j \\ u_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu'_j & \lambda'_j & u'_j \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{\mu_j}^2 I_N & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\lambda_j}^2 I_T & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{u_j}^2 I_{NT} \end{bmatrix}$$

Birimler için varyans kovaryans matrisleri:

$$\Omega_{jl} = E(v_j v'_l) = \sigma_{\mu_{jl}}^2 (I_N \otimes J_T) + \sigma_{\lambda_{jl}}^2 (J_N \otimes I_T) + \sigma_{u_{jl}}^2 (I_N \otimes I_T)$$

M sistem eşitliği için varyans kovaryans matrisi:

$$\Omega = E(vv') = \Sigma_{\mu} \otimes (I_N \otimes J_T) + \Sigma_{\lambda} \otimes (J_N \otimes I_T) + \Sigma_u \otimes (I_N \otimes I_T)$$

Burada $\Sigma_{\mu} = \begin{bmatrix} \sigma_{\mu_{jl}}^2 \end{bmatrix}$ ve $\Sigma_u = \begin{bmatrix} \sigma_{u_{jl}}^2 \end{bmatrix}$ 'dir ve her ikisi de $M \times M$ boyutlu matrislerdir. Yapılan dönüşümlerle, $\Omega^{-1/2}$ aşağıdaki gibi hesaplanmıştır;

$$\Omega^{-1/2} = \sum_{i=1}^4 \Lambda_i^{-1/2} \otimes Q_i$$

$$\Lambda_1 = \Sigma_u, \Lambda_2 = T\Sigma_{\mu} + \Sigma_u, \Lambda_3 = \Sigma_{\lambda} + \Sigma_u, \Lambda_4 = T\Sigma_{\mu} + N\Sigma_{\lambda} + \Sigma_u \quad \text{ve} \quad Q_1 = E_N \otimes E_T, \\ Q_2 = E_N \otimes \bar{J}_T, \quad Q_3 = \bar{J}_N \otimes E_T, \quad Q_4 = \bar{J}_N \otimes \bar{J}_T \text{ eşitlikleri vardır.}$$

Doğru kalıntının V olduğu bilgisi ile, varyans bileşenlerinin karesel sapmasız tahminleri aşağıdaki gibi elde edilmektedir:

$$\hat{\Sigma}_u = \frac{V'Q_1V}{(N-1)(T-1)}, \quad \hat{\Lambda}_2 = \frac{V'Q_2V}{(N-1)} \quad \text{ve} \quad \hat{\Lambda}_3 = \frac{V'Q_3V}{(T-1)}$$

Esnek tahminler için, V yerine havuzlanmış en küçük kareler kalıntıları ya da grup içi kalıntıları yerleştirilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 230-231).

Hausman-Taylor ve Amemiya-Macurdy'nin Modeli

Bu modelin temel varsayımı, açıklayıcı değişkenlerin bir alt kümesinin birim (tesadüfi) etkiler ile korelasyonlu olması, fakat artık hata ögesi (u_{it}) ile korelasyonlu olmamasıdır. Dolayısıyla açıklayıcı değişkenler hem içsel hem de dışsal değişkenlerden oluşmaktadır. Ayrıca, açıklayıcı değişkenler hem zamana göre değişen hem de zamana göre değişmeyen değişkenlerden oluşabilmektedir. Bu dört grup değişken modelde ayrı ayrı yer almakta ve tahminler bu şekilde yapılmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 231).

Aşağıdaki model ele alındığında:

$$Y_{it} = X_{1it}\beta_1 + X_{2it}\beta_2 + Z_{1i}\delta_1 + Z_{2i}\delta_2 + \mu_i + u_{it}$$

Burada:

X_{1it} : Dışsal değişken vektörüdür, zamana göre değişen değişkenlerden oluşmaktadır.

X_{2it} : İçsel değişken vektörüdür, zamana göre değişen değişkenlerden oluşmaktadır.

Z_{1i} : Dışsal değişken vektörüdür, zamana göre değişmeyen değişkenlerden oluşmaktadır.

Z_{2i} : İçsel değişken vektörüdür, zamana göre değişmeyen değişkenlerden oluşmaktadır.

X_{2it} ve Z_{2i} birim etki ile korelasyonlu olduğundan model tesadüfi etkiler varsayımı ile tahmin edilirse, tesadüfi etkiler modelinin dışsallık varsayımı ihlal edileceğinden parametreler tutarsız olmaktadır. Sabit etkiler varsayımı ile tahmin edilirse, μ_i ile birlikte, Z_1 ve Z_2 de grup içi dönüşüm sonucu modelden düşmekte ve dolayısıyla δ_1 ve δ_2 parametreleri tahmin edilememektedir. Hausman-Taylor (1981) ve Amemiya-MaCurdy (1986) tahmincileri bu sorunu çözmek için türetilmiştir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 231-232).

Bu tahmincilerde öncelikle, β_1 ve β_2 parametreleri grup içi tahminci ile tutarlı olarak tahmin edilmekte,

$$Y_{lit} = \beta_1 X_{lit} + \beta_2 X_{2it} + d_{it}$$

ve grup içi kalıntı ($\hat{d}_{it}$) elde edilmektedir:

$$\hat{d}_{it} = Y_{lit} - \hat{\beta}_{1SE} X_{lit} + \hat{\beta}_{2SE} X_{2it}$$

Daha sonra, X_{lit} ve Z_{li} araç değişkenler olarak kullanılarak, grup içi kalıntının Z_{li} ve Z_{2i} üzerine regresyonu bulunmaktadır ve kalıntılar elde edilmektedir:

$$\hat{d}_i = \delta_1 Z_{li} + \delta_2 Z_{2i} + f_i$$

Buradan δ_1 ve δ_2 'nin ortalama tahmincileri, $\hat{\delta}_{1AD}$ ve $\hat{\delta}_{2AD}$ (AD: Araç değişken tahmincisi) elde edilmektedir. β_1 ve β_2 'nin grup içi tahmincileri ($\hat{\beta}_{1SE}$ ve $\hat{\beta}_{2SE}$) ve δ_1 ve δ_2 'nin araç değişkenler tahmincileri ($\hat{\delta}_{1AD}$ ve $\hat{\delta}_{2AD}$) genel kalıntıları elde etmek için kullanılmaktadır:

$$\hat{v}_{it} = Y_{lit} - \hat{\beta}_{1SE} X_{lit} - \hat{\beta}_{2SE} X_{2it} - \hat{\delta}_{1AD} Z_{li} - \hat{\delta}_{2AD} Z_{2i}$$

Bu genel kalıntıdan ise, varyans bileşenlerini tahmin etmekte yararlanılmaktadır:

$$\hat{\sigma}_v^2 = \hat{v}'\hat{v} / NT$$

Varyans bileşenleri kullanılarak varyans kovaryans matrisi (Ω_i) elde edilmekte,

$$\Omega_i = 1 - \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_u^2}{\hat{\sigma}_u^2 + T_i \hat{\sigma}_\mu^2}}$$

ve genelleştirilmiş en küçük kareler yöntemi ile tahminler yapılabilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 232-233).

SINIRLI BAĞIMLI DEĞİŞKENLİ PANEL VERİ MODELLERİ

Sınırlı Bağımlı Değişkenli Panel Veri Modelleri

Bu bölümde; panel tercih modelleri (nitel bağımlı değişkenli panel veri modelleri), kesikli panel veri modelleri ve sansürlü bağımlı değişkenli panel veri modelleri incelenecektir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 245).

Panel Tercih Modelleri (Nitel Bağımlı Değişkenli Panel Veri Modelleri)

Tercih modellerinde bağımlı değişken, zaman t 'de i . birim için olay gerçekleşmişse 1 değerini ($Y_{it}=1$), gerçekleşmemişse 0 değerini ($Y_{it}=0$) almaktadır. Y_{it} 'nin 1 değerini alma olasılığı P_{it} ile, Y_{it} 'nin 0 değerini alma olasılığı ise $(1-P_{it})$ ile gösterilmektedir. Y_{it} 'nin beklenen değeri:

$$E(Y_{it}) = 1 \cdot P_{it} + 0 \cdot (1-P_{it}) = P_{it}$$

Açıklayıcı değişkenler ile t zamanında i . birim için olayın gerçekleşme olasılığı ise:

$$P_{it} = \text{Prob}(Y_{it}=1) = E(Y_{it}|X_{it}) = F(\beta' X_{it})$$

şeklindedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 245-246)

Sansürlü Bağımlı Değişkenli ve Kesikli Panel Veri Modelleri

Bazen iktisadi ilişkilerde tesadüfi değişkenler için sansür ile karşılaşılabilir. Örnek olarak bağımlı değişkeni “çalışılan saat” olan bir model düşünüldüğünde, bağımlı değişken sansürlüdür çünkü eğer i . birey t zamanında çalışmıyorsa, çalışılan saat 0 olarak gösterilmektedir ve regresyon modeli tobit (sansürlü) model kullanılarak ifade edilebilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 246).

Genel olarak panel veri modeli şu şekilde gösterilirse:

$$Y_{it} = \beta' X_{it} + \mu_i + u_{it}$$

Burada, $u_{it} \sim \text{IIN}(0, \sigma_u^2)$ 'dir ve panel tobit model için bağımlı değişken:

$$\begin{cases} Y_{it}^* > 0 & \text{ise,} & Y_{it} = Y_{it}^* \\ \text{diğer durumlarda,} & & Y_{it} = 0 \end{cases}$$

Kesikli panel veri modelinde ise, sadece $Y_{it}^* > 0$ durumu ele alınmakta ve diğerleri gözlenmemiş kabul edilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 246).

Sınırlı Bağımlı Değişkenli Panel Veri Modellerinin Tahmini

Klasik Sınırlı Bağımlı Değişkenli Panel Veri Modellerinin Tahmini

Bu tür modellerin tahmininde logit, probit, tamamlayıcı log-log (gompit), kesikli ve sansürlü modeller kullanabilmektedir⁹ (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 247).

Sınırlı Bağımlı Değişkenli Panel Veri Modellerinin Sabit Etkiler Varsayımıyla Tahmini

Birim etkinin (μ_i) sabit olduğu varsayıldığında genel model:

$$Y_{it} = \beta' X_{it} + \mu_i + u_{it}$$

Olmak üzere bu modelde, $Y_{it}=0$ olasılığı,

$$\text{Prob}(Y_{it} = 0) = \text{Prob}(u_{it} \geq -\beta' X_{it} - \mu_i)$$

şeklinde ya da daha açık bir ifade ile aşağıdaki gibidir:

$$\text{Prob}(u_{it} \geq -\beta' X_{it} - \mu_i) = \int_{-\beta' X_{it} - \mu_i}^{\infty} f(u_{it}) du_{it} = 1 - F(-\beta' X_{it} - \mu_i)$$

Burada $f(u_{it})$ ve $F(u_{it})$ sırasıyla, u_{it} 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu ve kümülatif dağılım fonksiyonudur (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 251-252).

En Çok Olabilirlik Tahmincisi

Sabit etkiler varsayımı altında sınırlı bağımlı değişkenli panel veri modelleri en çok olabilirlik yöntemiyle tahmin edilebilmektedir. N ve T'nin sonsuza gittiği durumda tutarlı tahminciler elde edilebilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 252).

Ancak panel verilerde T genellikle küçüktür. Birim sayısı N arttıkça tahmin edilmesi gereken birim etki sayısı da artmakta, ancak her birim etki hakkında elde edilen bilgi artmamaktadır. Bu durum tesadüfi parametre problemi (incidental parameters problem) olarak adlandırılmaktadır (Neyman ve Scott, 1948) (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 252).

Doğrusal olmayan modellerde T sonlu iken birim etkilerinin tutarsız tahmini, model parametrelerinin tahminlerine de yansımakta ve en çok olabilirlik tahmincisinin tutarsız olmasına neden olabilmektedir. Bununla birlikte T arttıkça tutarsızlık azalmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 252).

⁹ Detaylı bilgi için bkz. F. Yerdelen Tatoğlu, "Ekonometri: Stata Uygulamalı", "6. Bölüm Nitel Tercih Modelleri, Sansürlü ve Kesikli Regresyon Modelleri", 2020, Beta Basım Yayın AŞ, İstanbul.

Genel olarak doğrusal olmayan bir modelde, T gözlem ve N birim için log-olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 253):

$$\log L = \sum_{i=1}^N \left[\sum_{t=1}^{T_i} \log g(Y_{it}, \beta' X_{it} + \mu_i, \theta) \right], \quad i = 1, \dots, N; t = 1, \dots, T$$

Burada g(.) yoğunluktur ve analiz edilecek olan modeli tanımlamaktadır (logit, probit, kesikli regresyon, poisson, tobit vs.).

Logit model için log-olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi ele alınmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 253):

$$\log L = - \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \log [1 + \exp(\beta' X_{it} + \mu_i)] + \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T Y_{it} (\beta' X_{it} + \mu_i)$$

Bu fonksiyonun maksimizasyonu için 1. mertebe koşullar:

$$\frac{\partial \log L}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left[- \frac{e^{\beta' X_{it} + \mu_i}}{1 + e^{\beta' X_{it} + \mu_i}} + Y_{it} \right] X_{it} = 0$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \mu_i} = \sum_{t=1}^T \left[- \frac{e^{\beta' X_{it} + \mu_i}}{1 + e^{\beta' X_{it} + \mu_i}} + Y_{it} \right] = 0 \quad i=1, \dots, N$$

Sabit etkiler probit ve tobit modelde, μ_i 'nin, β ve σ_u^2 parametreleri üzerindeki etkisi yok edilememektedir. T sabitse tutarlı tahminler elde edilememektedir, çünkü μ_i 'deki tutarsızlık β ve σ_u^2 'ni da etkilemektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 255).

Çoklu tercih modelleri için ise, bağımlı değişken Y'nin, i. birim için $m_i + 1$ (0, 1, 2, ..., m) değer aldığı varsayılmaktadır ve bu modellerde bağımlı değişken Y şöyle tanımlanabilmektedir:

$$Y_{ij} = \begin{cases} Y_{ij} = j & (i = 1, \dots, N) \text{ ise;} & 1 \\ Y_{ij} \neq j & (i = 0, 1, \dots, m_i) \text{ ise;} & 0 \end{cases}$$

Olabilirlik fonksiyonu ise aşağıdaki gibi yazılabilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 255):

$$L = \prod_{i=1}^N \prod_{j=0}^{m_i} F_{ij}^{Y_{ij}}$$

Ağırlıklı (Tartılı) En Küçük Kareler Tahmincisi

Ağırlıklı en küçük kareler tahmincisi “minimum χ^2 tahmincisi” olarak da bilinmektedir. En çok olabilirlik tahmincisi ile aynı asimptotik etkinliğe sahip olmakla birlikte hesaplanması daha kolaydır. İstatistiksel olarak tercih edilebilir olmakla birlikte minimum χ^2 metodu çok fazla kısıtlama gerektirmektedir. Uygulanabilmesi için, açıklayıcı değişken vektörünün her bir değeri için tekrarlı gözlemlerin bulunması gerekmektedir. Çoğu açıklayıcı değişkenin sürekli olması durumunda bu koşul yöntemin uygulanmasını güçleştirmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 256).

Koşullu En Çok Olabilirlik Tahmincisi

Bu yöntemde birim etkiyi ifade eden katsayı için minimum yeterli bir istatistik şartı aranmaktadır. Andersen (1970) tarafından önerilen bu yöntemde göre, eğer birim etki (μ_i) için minimum yeterli bir istatistik (τ_i) varsa ve bu istatistik yapısal parametrelerden (β) bağımsızsa, koşullu yoğunluk fonksiyonu şöyledir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 256):

$$g(\tau_i | \beta, \mu_i) \text{ için, } f(Y_i | \beta, \tau_i) = \frac{f(Y_i | \beta, \mu_i)}{g(\tau_i | \beta, \mu_i)}$$

Bu yöntem, β 'nın μ_i 'ye bağımlılığını ortadan kaldırmaktadır. Dolayısıyla β 'nın tutarlı tahmincisi elde edilmektedir.

μ_i için minimum yeterli istatistik, log-olabilirlik fonksiyonunun μ_i 'ye göre kısmi türevi alınarak bulunabilmektedir. Sabit etkili logit modelde birim etki μ_i için minimum yeterli istatistik $\left(\sum_{t=1}^T Y_{it} \right)$ 'dir. Bu istatistiğe koşullandırılan olabilirlik fonksiyonu μ_i 'den bağımsız hale gelmektedir. Koşullu log-olabilirlik tahmincisi bu fonksiyonunun maksimize edilmesi ile elde edilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 256-258).

Doğrusal olasılık modeli ve logit model için basit dönüşüm fonksiyonları bulunabilse de probit model için birim etkilerden (μ_i) bağımsız β parametreleri için basit fonksiyonlar bulunamamaktadır. T sonlu iken probit model için, β 'nın tutarlı tahmincisi elde edilememektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 258).

Hausman Testi

Logit modelinin en çok olabilirlik tahmincisi ile, koşullu en çok olabilirlik tahmincisi arasındaki farkı bulmak için Hausman test kullanılabilmektedir. Logit en çok olabilirlik tahmincisi, birim etki olmaması ve alternatif tahmin yöntemlerine göre tutarsız olması biçimindeki temel hipotezi (H_0), tutarlı ve etkin olma hipotezine

karşı test etmektedir. Chamberlain'in koşullu en çok olabilirlik tahmincisi (1980), H_0 hipotezi kabul ya da reddedilsin tutarlıdır, fakat tüm veri kullanılmadığı için etkin değildir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 258).

Yarı Parametrik Tahminci

Yarı parametrik yaklaşım ile, birim etkiden (μ_i) elde edilen bilginin zayıf olması ve β tahminini fazla etkilememesi nedeni ile μ_i yok edilebilmekte ve dolayısıyla bu yöntemle tutarlı tahminçiler elde edilebilmektedir.

Manski (1987), örnek ortalama fonksiyonunu $[H_N(b)]$ maksimum eden tahmincinin kullanılmasıyla, modelin yapısal parametrelerinin (β) tutarlı tahmin edilebileceğini göstermiştir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 260-261).

Sınırlı Bağımlı Değişkenli Modellerin Tesadüfi Etkiler Varsayımıyla Tahmini

En Çok Olabilirlik Tahmincisi

Tesadüfi etkiler modellerinde μ_i 'nin X_i ile korelasyonsuz olduğu varsayımı yapılmaktadır. Tek değişkenli dağılım G 'den elde edilen tesadüfi bir örneklem için, log-olabilirlik fonksiyonu şu şekilde ifade edilebilmektedir:

$$\log L = \sum_{i=1}^N \log \int \prod_{t=1}^T F(\beta' X_{it} + \mu_i)^{Y_{it}} [1 - F(\beta' X_{it} + \mu_i)]^{1-Y_{it}} dG(\beta, \mu_i)$$

N sonsuza giderken bu fonksiyonun maksimize edilmesi ile, β ve μ_i için tutarlı tahminçiler elde edilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 262).

Tesadüfi etkiler modelleri için yapılan μ_i ve X_{it} 'nin korelasyonsuz olduğu varsayımı, ciddi bir kısıtlamadır. Bu nedenle μ_i ile X_{it} arasındaki ilişki için farklı görüşler öne sürülmüştür (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 262):

- Mundlak (1978), μ_i ile X_{it} arasındaki ilişkiyi şöyle tanımlamıştır; “ X_{it} 'nin ortalama değeri μ_i 'ye bağlıdır” ve aşağıdaki gibi gösterilebilmektedir:

$$\mu_i = \pi' \bar{X}_i + w_i$$

- Chamberlain (1980) ise, μ_i ile X_{it} arasında şu şekilde bir ilişki olduğunu varsaymaktadır:

$$\mu_i = \sum_{t=1}^T m'_t X_{it} + \eta_i = m' X_i + \eta_i$$

Burada, $m' = (m'_1, \dots, m'_T)$ ve $X'_i = (X'_{i1}, \dots, X'_{iT})$ 'dir.

Bu son varsayım log-olabilirlik fonksiyonuna yerleştirilirse:

$$\log L = \sum_{i=1}^N \log \int \prod_{t=1}^T F(\beta' X_{it} + m' X_i + \eta)^{Y_{it}} [1 - F(\beta' X_{it} + m' X_i + \eta)]^{1-Y_{it}} dG^*(\eta)$$

Burada G^* , η için bir tek değişkenli dağılım fonksiyonudur. Örneğin, F sıfır ortalama ve σ_η^2 varyansla bir standart normal dağılım fonksiyonu ise, spesifikasyon çoklu probit modeli vermektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 262-263).

Minimum Aralık Tahmincisi

Chamberlain'in minimum aralık tahmincisinde aşağıdaki kısıtlama konulmaktadır:

$$\pi = \text{vec}(\Pi') = f(\theta)$$

Burada, $\theta' = (\beta', m', \sigma_\eta^2)$ 'dir. Chamberlain (1980), aşağıdaki eşitliği minimum yapacak bir $\hat{\theta}$ 'nin seçilmesini önermiştir:

$$[\hat{\pi} - f(\theta)]' \hat{\Omega}^{-1} [\hat{\pi} - f(\theta)]$$

Burada $\hat{\Omega}$, $\Omega = J^{-1} \Delta J^{-1}$ 'nin tutarlı tahmincisidir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 268).

MEKÂNSAL PANEL VERİ MODELLERİ

Panel veride birim boyutunun iller, ilçeler, bölgeler, ülkeler gibi mekanlar olduğu durumda mekanlar arası komşuluk ilişkileri, bir bölgede meydana gelen olayların o bölgeye komşu ya da yakın olan bölgeleri de etkilemesi ya da meydana gelen global şokların tüm bölgeleri aynı anda etkilemesi söz konusu olabilmektedir. Bu bölümde mekanlar arasındaki bu ilişkilerin panel veri modelleri kapsamında ele alınması ve modellerin tahmini üzerinde durulmaktadır¹⁰ (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 285).

Temel Kavramlar

Mekânsal Etki

Mekanlar arasındaki etkileşim, “mekânsal etki” olarak adlandırılmaktadır. Mekânsal etkiler, modellere mekânsal otokorelasyon (mekânsal bağımlılık) ya da mekânsal heterojenlik yoluyla etki etmektedirler (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 285).

¹⁰ Bu bölümün öncesinde mekânsal ekonometri ile ilgili detaylı bilgi için bkz. F. Yerdelen Tatoğlu, “Mekansal Ekonometri: Stata Uygulamalı”, 2022, Beta Basım Yayın AŞ, İstanbul.

Mekânsal Bağımlılık

Birbirine komşu olan mahalleler, ilçeler, şehirler gibi coğrafi birimlerde meydana gelen olaylar birbirinden bağımsız olmadıklarından ya da dışsal şoklara benzer tepkiler verdiklerinden, mekânsal verilerle çalışılırken mekânsal otokorelasyona oldukça sık rastlanmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 285-286).

Mekânsal bağımlılıkta, birbirine daha yakın, komşu olan bölgelerin birbiri ile ilişkisi uzak olanlara göre daha fazladır ve bu bağımlılık pozitif ya da negatif yönde kendisini gösterebilmektedir. Mekânsal otokorelasyon, mekânsal panel veri modellerine çeşitli yollarla dahil edilmektedir; bağımlı değişkende, bağımsız değişkenlerde ya da hata teriminde meydana gelebilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 286).

Mekânsal Heterojenlik

Mekânsal heterojenlik, genel olarak yatay kesit veri ya da panel verilerle çalışılırken kullanılan bir kavram olan heterojenlik kavramı ile aynı şeyi ifade etmektedir. Mekânsal modellerde ele alınan ilçeler, iller, ülkeler gibi mekanlar heterojen olabilmekte ve modelin katsayıları ya da kalıntı varyansı mekanlar itibarıyla sabit olmayabilmektedir. Birinci durum heterojen panel veri modellerinin özel bir türü olarak düşünülebilmekte ve heterojenlik modellere çeşitli yollarla yansıtılarak tahmin yapılmaktadır. İkinci durumda ise, heteroskedastiteye sebep olmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 286).

Mekânsal Ağırlık Matrisi

Mekânsal ekonometride, mekanlar arasında görülen ilişkiler mekânsal ağırlık matrisi yardımıyla ifade edilebilmekte ve matris oluşturulurken haritalardan yararlanılmakta, coğrafi ağırlıklandırma teknikleri kullanılmaktadır. Mekânsal ağırlık matrisi uzaklığa ya da sınır komşuluğuna göre oluşturulmaktadır. Sınır komşuluğu söz konusu olduğunda mekanların paylaştığı ortak kenar ve köşelere göre kale, fil ve vezir komşuluğu olmak üzere üç komşuluk tanımı geliştirilmiştir. Ortak bir kenar paylaşıyorsa kale, ortak bir köşe paylaşıyorsa fil ve ortak bir kenar ve köşe paylaşıyorsa vezir komşuluğu söz konusu olmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 286).

Panel veri için mekânsal komşuluk matrisi W , $NT \times NT$ boyutlu pozitif bir matris olmak üzere, matristeki her bir eleman w_{ij} , i ve j bölgesi arasındaki etkileşimin varlığını ifade etmektedir. En basit haliyle komşuluk matrisi iki değer almaktadır: i ve j bölgeleri komşu ise 1; değilse 0. Uygulamada, genellikle bu matrisin satırlara göre standardize (normalize) edilmiş hali kullanılmaktadır. Satır standartlaştırma işleminde, satırdaki her bir eleman satır toplamına bölünmektedir. Satır standartlaştırıl-

miş komşuluk matrisine mekânsal ağırlık matrisi adı verilmektedir. Bu matrisin her bir elemanı w_{ij}^* şöyle elde edilmektedir:

$$w_{ij}^* = \frac{w_{ij}}{\sum_{j=1}^N w_{ij}}$$

Bir i bölgesinin komşusu yok ise, örneğin bir ada ise w_{ij}^* :

$$w_{ij}^* = \frac{w_{ij}}{\max\left(1, \sum_{j=1}^N w_{ij}\right)}$$

Böylece satırın her bir elemanı sıfır ile bir arasında değer almaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 286-287).

Mekanlar arasındaki ilişkiler, mekânsal haritalandırma yoluyla görsel olarak incelenebilmektedir¹¹ (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 287).

Mekânsal Regresyon Modelleri

Mekânsal etkiler mekânsal ekonometrik modellere üç şekilde dahil edilebilmektedir: Bağımlı değişken (Y) ile etkileşimli olarak (içsel etkileşim), bağımsız değişkenler (X) ile etkileşimli olarak (dışsal etkileşim) ve hata terimi (u) ile etkileşimli olarak. Bu etkileşimin türüne bağlı olarak farklı modeller söz konusu olmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 287).

Yuvalanmış Mekânsal (GNS) Model

Mekânsal modellerden en genel olanı Manski (1993) tarafından geliştirilen yuvalanmış mekânsal modeldir. Yuvalanmış mekânsal model I_T , T boyutlu birim matris; W_N , N×N boyutlu ağırlık matrisi ve $W = I_T \otimes W_N$ olmak üzere matris notasyonunda aşağıdaki gibi gösterilebilmektedir:

$$Y = \rho WY + X\beta + WX\theta + u \quad u = \lambda Wu + \varepsilon$$

Bu modelde WY mekânsal gecikme terimidir ve komşu bölgelerdeki Y'nin ağırlıklı ortalama değerini göstermektedir. WX 'in modele eklenmesi ile, mekânsal bağımlı ekonomik olgulardaki komşuluk etkisi, mekânsal gecikmeli açıklayıcı değişkenler aracılığı ile açıklanmaktadır. Wu , birbirine komşu bölgelerin artıkları arasındaki

¹¹ Detaylı bilgi için bkzn. F. Yerdelen Tatoğlu, “Mekansal Ekonometri: Stata Uygulamalı”, “2. Bölüm: Mekansal Haritalandırma”, 2022, Beta Basım Yayın AŞ, İstanbul.

mekânsal otokorelasyonu ifade etmektedir. Modeldeki ρ mekânsal otoregresif katsayı olarak ve λ mekânsal otokorelasyon katsayısı olarak adlandırılmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 288).

Mekânsal Durbin Model (SDM)

Mekânsal Durbin model, GNS modelden mekânsal otokorelasyonlu hata terimlerinin ($\lambda=0$) elimine edilmiş halidir. Bağımlı ve bağımsız değişkenlerde mekânsal etkilerin bulunduğu bu model matris notasyonunda aşağıdaki gibidir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 289):

$$Y = \rho WY + X\beta + WX\theta + \varepsilon$$

Genel Mekânsal (SAC) Model

Genel mekânsal modelde, mekânsal gecikmeli bağımlı değişken ve mekânsal otoregresif hata terimi içerilmektedir, GNS modelin $\theta=0$ olarak kısıtlanmış halidir. Bu model SARAR model olarak da bilinmektedir. Genel mekânsal model aşağıdaki gibi gösterilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 289):

$$Y = \rho WY + X\beta + u \quad u = \lambda Wu + \varepsilon$$

Mekânsal Durbin Hata Modeli (SDEM)

Mekânsal Durbin hata modeli, GNS modele $\rho=0$ kısıtı getirilerek elde edilmiştir. Mekânsal Durbin hata modeli matris notasyonunda aşağıdaki gibidir:

$$Y = X\beta + WX\theta + u \quad u = \lambda Wu + \varepsilon$$

Burada, β doğrudan ve θ dolaylı etkileri ifade etmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 289).

Mekânsal Gecikme (SAR) Modeli

Mekânsal gecikme modeli, mekânsal otoregresif model olarak da adlandırılmaktadır. SDM modelden $\theta=0$ ve SAC modelden ise $\lambda=0$ kısıtı ile farklılık göstermektedir, dolayısıyla bu iki modelin bir alt türü olarak düşünülebilmektedir. SAR model:

$$Y = \rho WY + X\beta + \varepsilon$$

Model Y için çözüldüğünde:

$$Y = (I - \rho W)^{-1} (X\beta + \varepsilon)$$

Burada ters matris $(I - \rho W)^{-1}$ mekânsal çarpan olarak adlandırılmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 289-290).

Mekânsal Hata Modeli (SEM)

Mekânsal hata modeli, hata sürecinde bağımlılık olduğu durumda kullanılan SAC ve SDEM modellerin sırasıyla $\rho=0$ ve $\theta=0$ ile kısıtlanmış bir türüdür. Mekânsal hata modeli matris notasyonunda aşağıdaki gibidir:

$$Y = X\beta + u \quad u = \lambda Wu + \varepsilon$$

u için çözüldüğünde,

$$u = (I - \lambda W)^{-1} \varepsilon$$

ve yerine yerleştirildiğinde mekânsal hata modeli (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 290):

$$Y = X\beta + (I - \lambda W)^{-1} \varepsilon$$

Bağımsız Değişkeni Mekânsal Gecikmeli (SLX) Model

Bağımsız değişkeni mekânsal gecikmeli model, sadece mekânsal gecikmeli açıklayıcı değişken içeren modellerdir. SLX model matris notasyonunda aşağıdaki gibidir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 290):

$$Y = X\beta + WX\theta + \varepsilon$$

Mekânsal Etkinin Olmadığı Model

Yapılan testler sonucunda bağımlı değişkende, bağımsız değişkenlerde ve hata teriminde mekânsal etkinin olmadığı tespit edilirse model aşağıdaki hali almaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 290-291):

$$Y = X\beta + u$$

Mekânsal Panel Veri Modellerinin Tahmin Yöntemleri

Mekânsal modeller, en çok olabilirlik, genelleştirilmiş momentler ve araç değişkenler tahmincileri kullanılarak tahmin edilebilmektedir. Panel verilerle çalışılırken klasik, sabit etkili ve tesadüfi etkili mekânsal panel veri modelleri söz konusu olmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 291).

Klasik (Havuzlanmış) Mekânsal Panel Veri Modelleri

Birim etkilerin olmadığı klasik mekânsal panel veri modellerinin tahmini en çok olabilirlik ve genelleştirilmiş momentler yöntemleri kullanılarak yapılabilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 291).

En Çok Olabilirlik Tahmincisi

Ele alınan mekânsal panel veri modeli için log-olabilirlik fonksiyonunun oluşturulması ile en çok olabilirlik yöntemi kullanılarak model tahmin edilebilmektedir.

Mekânsal gecikmeli model için kalıntının normal dağılımı varsayımı ile log-olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi oluşturulmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 291):

$$L = \ln \left| I_T \otimes (I_N - \rho W_N) \right| - \frac{NT}{2} \ln \sigma_\varepsilon^2 - \frac{(y - \rho(I_T \otimes W_N)y - X\beta)'(y - \rho(I_T \otimes W_N)y - X\beta)}{2\sigma_\varepsilon^2}$$

Mekânsal hata modeli için kalıntının normal dağılımı varsayımı ile log-olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi oluşturulabilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 291-292):

$$L = -\frac{NT}{2} \ln \sigma_\varepsilon^2 + T \ln |B_N| - \frac{(y - X\beta)' [I_T \otimes (B_N' B_N)] (y - X\beta)}{2\sigma_\varepsilon^2}$$

Diğer modeller için de log-olabilirlik fonksiyonu bu modellere benzer şekilde oluşturulmaktadır.

Belirli bir birimdeki belirli bir açıklayıcı değişken değiştiğinde sadece bu birimdeki bağımlı değişkenin değişmesi direk, diğer birimlerdeki bağımlı değişkenlerdeki değişiklik ise dolaylı etki olarak adlandırılmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 306).

Genelleştirilmiş Momentler Tahmincisi

Yatay kesit birim sayısının çok büyük olduğu durumda (), EÇO tahmincisinin hesaplama güçlüğü nedeniyle Kelejian ve Prucha (1998) araç değişken yaklaşımını, daha sonra mekânsal hata modelleri için GMM tahmincisini önermişlerdir (Kelejian ve Prucha, 1999). Tesadüfi etkiler mekânsal hata modeli için ise moment koşullarına dayalı GMM tahmincisi geliştirilmiştir (Kapoor, Kelejian ve Prucha, 2007) (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 313-314).

Mekânsal otoregresif kalıntılı hatalar:

$$u = \lambda(I_T \otimes W_N)u + \varepsilon$$

Moment koşulları:

$$E \left[\frac{1}{NT} \varepsilon' \varepsilon \right] = \sigma_\varepsilon^2, \quad E \left[\frac{1}{NT} \varepsilon' (I_T \otimes W_N') (I_T \otimes W_N) \varepsilon \right] = \frac{1}{N} \sigma_\varepsilon^2 \text{tr}(W_N' W_N)$$

$$E\left[\frac{1}{NT}\varepsilon'(I_T \otimes W_N)\varepsilon\right]=0, \quad tr(I_T \otimes W_N'W_N)=Tr(W_N'W_N), \quad tr(I_T \otimes W_N)=0$$

Bu eşitlikler kullanılarak parametreler tutarlı olarak tahmin edilebilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 313-314:

$$\hat{\beta} = \left[X'(I_T \otimes B_N' B_N) X \right]^{-1} X'(I_T \otimes B_N' B_N) y$$

Sabit Etkiler Mekânsal Panel Veri Modelleri

Sabit etkiler modellerinin tahminde her bir mekânsal model için olabilirlik fonksiyonunun oluşturulması ile en çok olabilirlik yöntemi kullanılabilmektedir.

Sabit etkiler mekânsal gecikme modeli,

$$Y_t = \alpha_i + \rho W_N Y_t + X_t \beta + \varepsilon_t$$

için log-olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibidir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 316):

$$\ln L = -\frac{NT}{2} \ln(2\pi\sigma_\varepsilon^2) + T \sum_{i=1}^N \ln(1 - \rho W_i) - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t' \varepsilon_t$$

Burada $\varepsilon_t = (I_N - \rho W_N)(Y_t - \bar{Y}) - (X_t - \bar{X})\beta$, $\bar{Y} = (\bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_N)$, $\bar{X} = (\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_N)$

Sabit etkiler mekânsal hata modeli,

$$Y_t = \alpha_i + X_t \beta + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t = \lambda W_N \varepsilon_t + u_t$$

için log-olabilirlik fonksiyonu ise aşağıdaki gibidir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 316):

$$\ln L = -\frac{NT}{2} \ln(2\pi\sigma_\varepsilon^2) + T \sum_{i=1}^N \ln(1 - \lambda W_i) - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t' \varepsilon_t$$

N sonsuza giderken, Nickell sapması nedeniyle birim etkiler tutarlı tahmin edilememekte, sadece eğim parametreleri tutarlı olarak tahmin edilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 316).

Tesadüfi Etkiler Mekânsal Panel Veri Modelleri

Tesadüfi etkiler mekânsal panel veri modellerinin tahmininde en çok olabilirlik yöntemi kullanılmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 322).

Mekânsal Panel Veri Modelleri İçin İstatistikler ve Testler

Mekansal modelin türü seçebilmek için birtakım testler bulunmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 327).

Moran I İstatistiği ve Testi

Mekânsal otokorelasyonun varlığını test etmek için en yaygın olarak kullanılan testlerden bir tanesi Moran I testidir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 327). Hipotezler:

H_0 : Mekânsal otokorelasyon yoktur.

H_1 : Mekânsal otokorelasyon vardır.

Moran I istatistiği (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 327):

$$I = \frac{n}{S_0} \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_{ij} (x_i - \bar{x})(x_j - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Burada, W mekânsal ağırlık matrisini ve n gözlem sayısını ifade etmektedir. S standartlaştırma vektörüdür ve ağırlık matrisindeki elemanların toplamına eşittir. Moran I istatistiği için asimptotik dağılım Cliff ve Ord tarafından geliştirilmiştir. Z istatistiği (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 327):

$$Z = \frac{I - E(I)}{[V(I)]^{1/2}}$$

Burada, $E(I)$ Moran I'nin beklenen değeri ve $V(I)$ varyansı olmak üzere normallik varsayımı altında sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$E(I) = -\frac{1}{n-1}$$

$$Var(I) = \left(\frac{1}{S_0^2(n^2-1)} (n^2 S_1 - n S_2 + 3 S_0^2) \right) - E(I)^2$$

Burada:

$$S_1 = 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_{ij}, \quad S_2 = 4 \sum_{i=1}^n W_{i\cdot}^2 \quad \text{ve} \quad k = \frac{\left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4 / n \right]}{\left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / n \right]^4}$$

H_0 hipotezi reddedilemezse, mekânsal otokorelasyon yoktur. Moran I test istatistiği anlamlı ve z skoru pozitifse, yüksek ve/veya düşük değerler mekânsal olarak kümelenebilir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 328-329).

Geary C İstatistiği ve Testi

Geary (1954), mekânsal bağımlılığı test etmek amacıyla bir test önermiştir ve Geary C istatistiği aşağıdaki gibi elde edilmektedir:

$$C = \frac{n-1}{2} \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} (x_i - x_j)^2}{\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} \right] \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Geary C istatistiği 0 ve 2 arasında değer almakta ve 1 değeri civarında bağımlılık olmadığını, 1'den büyük olması negatif mekânsal otokorelasyonun, 1'den küçük olması ise pozitif mekânsal otokorelasyonun varlığını göstermektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 333).

Getis-Ord G İstatistiği ve Testi

Mekânsal bağımlılığın yoğunluğunu ölçen diğer bir istatistik Getis ve Ord tarafından geliştirilen G istatistiğidir. G istatistiği (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 334):

$$G = \frac{\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{i,j} x_i x_j \right)}{\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \right)}$$

Burada $w_{i,j}$ söz konusu bölgeler arasındaki mekânsal ağırlığı göstermektedir.

Global G istatistiği için temel hipotez, bölgelerin değerleri arasında mekânsal kümelenme olmadığını belirtmektedir. G test istatistiği istatistiksel olarak anlamlı olmak üzere, Z skoru pozitif ise çalışılan alanda yüksek değerlerin kümелendiğini ve negatifse çalışılan alanda düşük değerlerin kümелendiğini göstermektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 334-335).

LM Testleri

Mekânsal modellerle çalışılırken mekânsal hata ya da mekânsal gecikmenin birlikte ya da ayrı ayrı varlığını sınamak için LM testi yapılabilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 335).

LM Hata Testi

Mekânsal hatanın varlığını tespit edebilmek amacıyla, temel hipotezi $H_0: \lambda=0$ olan LM testi yapılabilmektedir. Mekânsal hata için LM test istatistiği:

$$LM_{\lambda} = \frac{\left(\frac{\hat{\varepsilon}'(\mathbf{I}_T \otimes W)\hat{\varepsilon}}{\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2} \right)^2}{T \cdot \text{trace}(WW + W'W)} \sim \chi^2(1)$$

Burada, $\hat{\varepsilon} = y - X\hat{\beta}$, $\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 = \hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon} / NT$ eşitlikleri vardır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 335).

LM Gecikme Testi

Mekânsal gecikmeli bağımlı değişkenin mekânsal otokorelasyonlu olup olmadığını tespit edebilmek amacıyla, temel hipotezi $H_0: \rho=0$ olan LM testi yapılabilmektedir. Mekânsal gecikme için LM test istatistiği (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 336-337):

$$LM_{\rho} = \frac{\left(\frac{\hat{\varepsilon}'Wy}{\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2} \right)^2}{B} \sim \chi^2(1)$$

Burada aşağıdaki eşitlikler vardır:

$$W = I_T \otimes W, \quad \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 = \hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon} / NT, \quad \hat{\varepsilon} = y - X\hat{\beta}$$

$$B = \left[(W\hat{y})' M(W\hat{y}) / \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 \right] + T \cdot \text{trace}(WW + W'W)$$

LM Hata ve Gecikmenin Birlikte Testi

Mekânsal hata teriminde ve gecikmeli bağımlı değişkende mekânsal otokorelasyon olup olmadığını tespit edebilmek amacıyla, temel hipotezi $H_0: \rho=\lambda=0$ ve alternatif hipotezi H_1 : en az biri sıfırdan farklıdır şeklinde olan LM testi yapılabilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 337).

LR Testleri

Mekânsal otokorelasyonun varlığını tespit etmek amacıyla ayrı ayrı ya da birleşik LR testleri yapılabilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 338).

LR Hata Testi

Mekânsal hatanın varlığını sınamak için temel hipotez $H_0: \lambda=0$ şeklinde kurulmakta ve LR testi yapılabilmektedir:

$$LR_{\lambda} = 2 \left[\hat{L} - \tilde{L} \right]$$

Burada, $\hat{L}$ klasik ve $\tilde{L}$ mekânsal hataya sahip modele ait log-olabilirlik fonksiyonunu ifade etmektedir. LR test istatistiği, 1 serbestlik dereceli χ^2 dağılımına uymaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 338).

LR Gecikme Testi

Mekânsal gecikmenin varlığını sınamak için temel hipotez $H_0: \rho=0$ şeklinde kurulmakta ve LR testi yapılabilmektedir:

$$LR_{\rho} = 2 \left[\hat{L} - \tilde{L} \right]$$

Burada $\hat{L}$ klasik ve $\tilde{L}$ mekânsal gecikmeye sahip modele ait log-olabilirlik fonksiyonunu ifade etmektedir. Test istatistiği, 1 serbestlik dereceli χ^2 dağılmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 339).

LR Hata ve Gecikmenin Birlikte Testi

Mekânsal hata ve gecikmenin varlığını birlikte sınamak için temel hipotez $H_0: \rho=\lambda=0$ şeklinde kurulmakta, alternatif hipotezi H_1 : en az biri sıfırdan farklıdır şeklinde olan LR testi yapılabilmektedir:

$$LR_{\lambda, \rho} = 2 \left[\hat{L} - \tilde{L} \right]$$

Burada $\hat{L}$ klasik ve $\tilde{L}$ mekânsal hata ve gecikmeye sahip modele ait log-olabilirlik fonksiyonunu ifade etmek üzere test istatistiği, 2 serbestlik dereceli χ^2 dağılmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 340).

LR Mekânsal Bağımsız Değişkenin Testi

SDM modelde mekânsal bağımsız değişkenin anlamlılığı da test edilebilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2023, s. 340).