

PANEL VERİ – PANEL VERİ ANALİZİ

Ekonometrik araştırmanın en önemli aşamalarından bir tanesi, değişkenlere ait verilerin toplanmasıdır. Güvenilir kaynaklardan ve doğru olarak veri toplanmasının yanı sıra, kullanılacak modele uygun olacak şekilde veri toplanması da ekonometrik tahminlerin güvenilirliğini büyük ölçüde etkilemektedir. Ekonometrik analizlerde üç veri türü kullanılmaktadır. Bunlar; zaman serisi verisi, yatay kesit veri ve panel veridir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 1).

Zaman Serisi Verisi: Değişkenlerin değerlerinin gün, ay, mevsim, yıl gibi zaman birimlerine göre değişimini içeren verilere denilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 1-2).

Yatay Kesit Veri: Zamanın belli bir noktasında, farklı birimlerden toplanan verilere denilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 2).

Panel Veri: Bireyler, ülkeler, firmalar, hane halkları gibi birimlere ait yatay kesit gözlemlerin, belli bir dönemde bir araya getirilmesi olarak tanımlanmaktadır. Panel veri, N sayıda birim ve her bir birime karşılık gelen T sayıda gözlemden oluşmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 2-3).

Zaman boyutuna sahip yatay kesit veriler bir başka ifade ile panel veriler kullanılarak oluşturulan panel veri modelleri yardımıyla ekonomik ilişkilerin tahmin edilmesi yöntemine “*panel veri analizi*” ismi verilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 4).

Genel olarak panel veri modeli;

$$Y_{it} = \alpha_{it} + \beta_{kit} X_{kit} + u_{it} \quad i=1,...,N; t=1,...,T$$

şeklinde yazılabilmektedir. Burada, Y bağımlı değişken, X_k bağımsız değişkenler, α sabit parametre, β eğim parametreleri ve u hata terimidir. i alt indisi birimleri, t alt indisi ise zamanı ifade etmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 4-5).

Temel Kavramlar

Dengeli Panel – Dengesiz Panel: Panel verilerle çalışıldığında, her bir birim tüm zamanlar boyunca gözlenmişse “dengeli panel”; bazı birimler için bazı zamanlara ait veriler mevcut değilse “dengesiz panel” söz konusu olmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 5).

Birim Etki – Zaman Etkisi: Panel veri birçok birimin bir araya gelmesi ile oluşmaktadır ve her bir birimin kendisine ait gözlenemeyen özelliklerine “birim etki” ismi verilmektedir. Her bir zaman diliminin kendine özgü özelliklerini yansıtan değişkene de “*zaman etkisi*” ismi verilmektedir. Uygulamada daha çok bi-

rim etkinin olduğu durumlarla karşılaşılmaktadır. Bu nedenle, gerek teorik ve gerekse uygulamalı çalışmalarda birim etkili modeller üzerinde daha çok durulmakta ve literatür bu yönde yoğunlaşmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 5-6).

İçsellik – Dışsallık: “*Dışsallık*”, bağımsız değişkenler ile hata teriminin korelasyonlu olmaması olarak tanımlanmaktadır. Dışsallığın, zayıf (eşzamanlı) ve katı dışsallık olmak üzere iki türü vardır. Bağımsız değişkenin ve hata teriminin aynı dönemde korelasyonsuz olduğu durumda “*zayıf dışsallık*”; bağımsız değişkenin cari, geçmiş ve gelecek değerleri ile hata teriminin korelasyonsuz olduğu (tersi de geçerlidir) durumda da “*katı dışsallık*” söz konusu olmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 6-7).

Zayıf dışsallık:

$$E(u_{it} X_{it}) = 0 \quad i=1,...,N; t=1,...,T$$

Katı dışsallık:

$$E(u_{it} X_{is}) = 0 \text{ ya da } E(u_{is} X_{it}) = 0 \quad (\text{tüm } s \text{ ve } t\text{'ler için})$$

Dışsallık varsayımının bozulma nedenleri aşağıdaki gibi özetlenebilir:

1. Dışlanmış değişkenler: Modelden dışlanmış değişkenler, içsellik problemine sebep olabilmektedir.
2. Modelin dinamik yapısı: Dinamik modellerden otoregresif modellerde, bağımsız değişken olarak ele alınan gecikmeli bağımlı değişkenler ile hata terimi arasındaki korelasyon içsellik problemine sebep olmaktadır.
3. Eşanlı denklem sistemleri: Eşanlı denklem sistemlerinde bağımlı-bağımsız değişken ayırımı mevcut olmadığından, bir modeldeki bağımsız değişken başka bir modelde bağımlı değişken olabilmektedir. Dolayısıyla sistemdeki bağımsız değişkenler ile hata terimleri arasında korelasyon görülebilmektedir.
4. Ölçme hataları: Bağımsız değişkenlerde ölçme hatası olduğu takdirde, bu ölçme hatası hata teriminde ifade edilmektedir ve hata terimi ile bağımsız değişken(lerin) korelasyonlu olmasına neden olmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 6-7).

Heterojenlik: Panel veri analizinde yer alan bireyler, firmalar, ülkeler, şehirler gibi birimler genelde heterojendir. Bu heterojenliği hesaba katmamak ilgilenilen parametrelerin tutarsız tahminlerine sebep olmaktadır. Heterojenliği modele yansıtmanın en kolay yolu sabit ve/veya eğim parametrelerinin heterojen olduğunu varsaymak ve ona göre tahmin yöntemi belirlemektir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 7-9).

Birimler Arası Korelasyon: Birimler arası korelasyon, literatürde “yatay kesit bağımlılık” olarak da bilinmektedir. Panel veri modelinin her bir birimi için hesaplanan hata terimleri arasında korelasyon olduğunu ifade etmektedir. Doğru modeli kurabilmek için, birimler arası korelasyonun varlığı test edilmeli ve eğer varsa tahmin aşamasında ona göre önlemler alınmalıdır. Birimler arası korelasyon genelde mekansal etkiler, bir birimden diğerine taşan etkiler, gözlenemeyen genel faktörler ya da global ölçekte yaşanan şoklar ve krizler sebepleriyle meydana gelmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 9).

Panel Verinin Avantajları ve Kısıtlamaları

Panel Verinin Avantajları

Ekonometrik araştırmalarda panel veri kullanımı, yatay kesit ve zaman serisi verileri kullanmanın avantajlarına ilave olarak birçok avantaj sağlamaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 9-10).

1. Birim Değişkenliğini ve Gözlenemeyen Heterojenliği Modele İlave Edebilmek: Ekonometrik analizlerde kullanılan birimler genelde heterojendir. Zaman serisi ve yatay kesit veri analizleri bu değişkenliği tek başına kontrol edememekte iken; panel veri analizi, bu heterojenliği dikkate almaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 10-11).

2. Tahmin Sapmasını Azaltmak: Panel veri modellerinde dışlanan değişkenler nedeniyle hata terimi ile açıklayıcı değişkenler korelasyonlu olabilmekte ve parametre tahminleri sapmalı olmaktadır. Panel veri kullanılarak bu değişkenlerin etkileri kontrol altında tutulabilmektedir, bu durumda tahmin sapması azalmakta ya da tamamen yok olmaktadır. Çünkü korelasyonun kaynağını bilmek, tutarlı tahminler elde etmek için önemli bilgiler sağlamaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 11-12).

3. Çoklu Doğrusal Bağlantı Problemini Azaltmak: Panel veri kullanılarak hem serbestlik derecesi artırılabilen, hem de değişkenlerin iki boyuta göre değerlendirilmesi ve özellikle birimlere ait bilgilerin varlığı nedeniyle veriden sağlanan bilgi ile model için gerekli olan bilgi arasındaki fark azaltılabilmektedir. Bu durumda da çoklu doğrusal bağlantı sorunu azalmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 12-13).

4. Daha Kapsamlı Modeller Kurabilmek: Panel veri, tek başına zaman serisi ya da yatay kesit veri kullanılarak kurulamayan, hem zaman hem de birim boyutunu içeren, daha kapsamlı ve karmaşık davranışsal modeller yapılmasına ve bu modellerin tahmin ve test edilmesine imkân tanımaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 13).

Panel Veri Kullanmanın Getirdiği Kısıtlamalar

Panel veri kullanmanın yukarıda sayılan avantajlarının yanında, getirdiği bazı dezavantajlar ve kısıtlamalar da bulunmaktadır.

1. Hata Payında Oluşan Sapmalar: Panel veri modellerindeki hata terimi; zaman serisine, yatay kesit veriye ve panel veriye özgü sapmaları taşımaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 6-14).

2. Veri Toplama Problemi: Panel veri ile yapılan çalışmalarda en önemli problem, verilere ulaşmak ve verileri düzenlemektir. Ayrıca sansürlü gözlemler ve özellikle anket çalışmalarında çeşitli nedenlerden dolayı cevapsız kalan sorular nedeniyle, verinin kısıtlanması da mümkündür. Fakat veriye daha rahat ulaşılabilen günümüzde bu problem gittikçe önermini kaybetmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 14).

3. Zaman Serisinin Kısa Olma Problemi: Panel veride özellikle mikro bazda analiz yapıldığında, birim boyutu fazla olmasına rağmen zaman boyutu kısadır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 14).

DOĞRUSAL PANEL VERİ MODELLERİ

Genel olarak doğrusal panel veri modeli;

$$Y_{it} = \beta_{0it} + \beta_{1it} X_{1it} + \beta_{2it} X_{2it} + \dots + \beta_{kit} X_{kit} + u_{it} \quad i=1, \dots, N; t=1, \dots, T$$

ya da kısaca;

$$Y_{it} = \beta_{0it} + \sum_{k=1}^K \beta_{kit} X_{kit} + u_{it} \quad i=1, \dots, N; t=1, \dots, T$$

şeklinde ifade edilebilmektedir. Burada alt indislerden i hane halkı, birey, firma, şehir gibi birimleri, t ise gün, ay, yıl gibi zamanı göstermektedir. Bir başka ifade ile i yatay kesit boyutunu; t ise zaman boyutunu ifade etmektedir. β_{0it} , sabit terimi; β_{kit} , $K \times 1$ boyutlu parametreler vektörünü; X_{kit} , k . açıklayıcı değişkenin t zamanında i . birim için değerini; Y_{it} , bağımlı değişkenin t zamanında i . birim için değerini göstermektedir. Panel veri modellerinde parametrelerin, her dönemde ve her birim için değer almasına izin verilmektedir. u_{it} hata terimlerinin sıfır ortalama ve sabit varyansla tüm zaman dönemlerinde ve tüm birimler için özdeş ve bağımsız normal dağıldığı [$IIN(0, \sigma_u^2)$] varsayılmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 37).

Panel veri modelleri, parametrelerin birim ve/veya zamana göre değer almasına bağlı olarak aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir;

1. Hem sabit, hem de eğim parametrelerinin birimlere ve zamana göre sabit olduğu modeller: Bu tür modellere, “*Klasik Model*” denilmektedir.

$$Y_{it} = \beta_0 + \sum_{k=1}^K \beta_k X_{kit} + u_{it} \quad i=1, \dots, N; t=1, \dots, T$$

2. Eğim parametresinin sabit, sabit parametrenin birimlere göre değer aldığı modeller: Bu tür modellere, “*Birim Etkili Model*” denilmektedir.

$$Y_{it} = \beta_{0i} + \sum_{k=1}^K \beta_k X_{kit} + u_{it} \quad i=1, \dots, N; t=1, \dots, T$$

3. Eğim parametresinin sabit, sabit parametrenin birimlere ve zamana göre değer aldığı modeller: Bu tür modeller ise, hem birim hem de zaman etkisi içermesi nedeniyle, “*Birim ve Zaman Etkili Model*” olarak bilinmektedir.

$$Y_{it} = \beta_{0it} + \sum_{k=1}^K \beta_k X_{kit} + u_{it} \quad i=1, \dots, N; t=1, \dots, T$$

Üstteki üç modelde sabit parametre birimlere ve zamana göre heterojendir.

4. Tüm parametrelerin birimlere göre değer aldığı, zamana göre sabit olduğu modeller: Bu modellere tüm parametreleri birimlere göre heterojen olan bu modeller denilmektedir.

$$Y_{it} = \beta_{0i} + \sum_{k=1}^K \beta_{ki} X_{kit} + u_{it} \quad i=1, \dots, N; t=1, \dots, T$$

5. Tüm parametrelerin hem birimlere hem de zamana göre değer aldığı modeller,

$$Y_{it} = \beta_{0it} + \sum_{k=1}^K \beta_{kit} X_{kit} + u_{it} \quad i=1, \dots, N; t=1, \dots, T$$

şeklinde gösterilmekte olup bu modeller tüm parametrelerine göre heterojendir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 37-38).

Klasik Model Ve Havuzlanmış En Küçük Kareler

Klasik modelde, hem sabit hem de eğim parametrelerinin birimlere ve zamana göre sabit olduğu yani bütün gözlemlerin homojen olduğu varsayılmaktadır. Bu durumda panel veri modeli genel olarak,

$$Y_{it} = \beta_0 + \sum_{k=1}^K \beta_k X_{kit} + u_{it} \quad i=1, \dots, N; t=1, \dots, T$$

ya da;

$$Y_{it} = X_{it}\beta + u_{it} \quad i=1, \dots, N; \quad t=1, \dots, T$$

şeklinde yazılabilmektedir. β 'nın tahmini için Havuzlanmış En Küçük Kareler (HEKK) Yöntemi kullanılabilir. HEKK tahmincisi,

$$\hat{\beta} = \left(\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T X'_{it} X_{it} \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T X'_{it} Y_{it} \right)$$

şeklinde hesaplanabilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 40-41).

Havuzlanmış En Küçük Kareler Yönteminin Ardındaki Varsayımlar

Havuzlanmış en küçük kareler yönteminin varsayımları aşağıdaki gibidir:

HEKK 1: $E(X'_{it}u_{it}) = 0$: X_{it} , zayıf dışsal değişkendir, bir başka ifade ile u_{it} ile korelasyonsuzdur. X_{is} , u_{it} ile korelasyonlu olabilmektedir ($t \neq s$ için), bir başka ifade ile katı dışsal değildir.

HEKK 2: $\text{rank} \left[\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T E(X'_{it} X_{it}) \right] = K$: Burada K açıklayıcı değişken sayısı olmak üzere, bu eşitlik X 'ler arasında tam çoklu doğrusal bağlantı olmadığını ifade etmektedir.

HEKK 3a: $E(u_{it}^2 X'_{it} X_{it}) = E(u_{it}^2) E(X'_{it} X_{it}) = \sigma^2 E(X'_{it} X_{it})$ tüm i ve t 'ler için: Koşullu varyans X_{it} 'den bağımsızdır. Koşulsuz varyans tüm dönemler için aynıdır.

HEKK 3b: $E(u_{it}u_{is} X'_{it} X_{is}) = 0$ ($t \neq s$): $E(u_{it}u_{is}) = 0$ ($t \neq s$): Hata teriminin koşulsuz kovaryansı sıfırdır. $E(u_{it}u_{is} | X_{it}, X_{is}) = 0$ ($t \neq s$): hata teriminin koşullu kovaryansı sıfırdır.

Tüm bu varsayımlar sağlansa bile, havuzlanmış en küçük kareler tahmincileri “Doğrusal En İyi Sapmasız Tahmin Edici (DESTE)” değildir. Çünkü DESTE’yi sağlamak için katı dışsallık varsayımına ihtiyaç duyulmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 41-42).

Havuzlanmış En Küçük Kareler Yönteminin Özellikleri

- Hata teriminde birim ve/veya zaman etkileri yoksa havuzlanmış en küçük kareler iyi bir tahmin yöntemidir, tutarlı tahminciler vermektedir.
- Hata teriminde birim ve zaman etkileri varsa, havuzlanmış en küçük kareler yönteminde hata terimi $v_{it} = \mu_i + \lambda_t + u_{it}$ ’dir, yani birleşik hatadır.

- Hata teriminde birim ve zaman etkileri varsa; havuzlanmış en küçük kareler tahmincileri, sadece bu etkiler bağımsız değişkenler ile korelasyonsuzsa $[E(X_{it}\mu_i)=0 \text{ ve } E(X_{it}\lambda_t)=0]$ tutarlıdır. Bu da $E(X_{it}u_{it})=0$ varsayımının ilavesi ile $E(X_{it}v_{it})=0$ varsayımı sağlanarak mümkün olmaktadır. Bağımsız değişkenlerin her bir etki (μ_i ve λ_t) ile ve hata terimi (u_{it}) ile ilişkisiz olması varsayımı özellikle bazı modeller için çok zor sağlanmaktadır. Bu varsayım sağlansa bile, her bir hata teriminde birim etkiler olması nedeniyle, otokorelasyonla karşılaşmaktadır. Dolayısıyla tutarlılık sağlansa bile, tahminciler (genelde) etkin değildir.
- Hata terimi heteroskedastik ise, etkin tahminciler elde edilememektedir. Bu durumda, dirençli standart hataların kullanılması ya da genelleştirilmiş en küçük kareler (GEKK) yöntemi kullanılarak tahminler yapılması gibi bir yöntem seçilmelidir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 42).

Gözlenemeyen Etkiler (Birim ve Zaman Etkileri)

Gözlenemeyen etkilerle model genel olarak şöyle yazılabilmektedir;

$$Y_{it} = X_{it}\beta + \mu_i + \lambda_t + u_{it} \quad i=1,...,N; t=1,...,T$$

burada X_{it} , sadece zamana göre değişen, sadece birimlere göre değişen ve hem zamana hem birimlere göre değişen değişkenlerden oluşabilmektedir. μ_i ve λ_t sırasıyla gözlenemeyen birim ve zaman etkileridir. Bu model, hem birimlere hem zamana göre etkiler içerdiği için, “İki Yönlü Model”dir.

$$Y_{it} = X_{it}\beta + \lambda_t + u_{it} \quad i=1,...,N; t=1,...,T$$

$$Y_{it} = X_{it}\beta + \mu_i + u_{it} \quad i=1,...,N; t=1,...,T$$

Bu iki model ise “Tek Yönlü Model”lerdir. İlk modelde sadece zaman etkileri; ikinci modelde ise sadece birim etkiler yer almaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 51-52).

Birinci Farklar Yöntemi

HEKK 1 varsayımı olan bağımsız değişkenler ile hata teriminin korelasyonsuz olduğu varsayımı, çoğu zaman hata teriminin içinde yer alan birim etkinin bir ya da daha fazla açıklayıcı değişken ile korelasyonlu olması sebebiyle gerçekleşmektedir. Bu durumda bir yol, modeldeki birim etkileri elimine etmektir, bu da değişken dönüşümü ile mümkün hale gelebilmektedir. Birim etkileri elimine etmek için basit bir çözüm, birinci fark dönüşümüdür. Birinci fark dönüşümü sonu-

cunda, birim etkinin modelden düşmesinin yanı sıra her bir yatay kesit birimde zaman boyutunun birinci gözlemi kaybolmaktadır.

Sadece birim etkilerin olduğu tek yönlü model:

$$Y_{it} = X_{it}\beta + \mu_i + u_{it} \quad i=1, \dots, N; \quad t=1, \dots, T$$

Bu modelinin birinci farkı:

$$\Delta Y_{it} = \Delta X_{it}\beta + \Delta u_{it}$$

Burada, $\Delta Y_{it} = Y_{it} - Y_{it-1}$ ve $\Delta X_{it} = X_{it} - X_{it-1}$ 'dir. β artık sabit parametreyi içermemekte, hata terimi ise dönüşüm sonucu aşağıdaki gibi olmaktadır:

$$\Delta v_{it} = v_{it} - v_{it-1} = (\mu_i + u_{it}) - (\mu_i + u_{it-1}) = u_{it} - u_{it-1} = \Delta u_{it} = e_{it}$$

Bu modele, havuzlanmış en küçük kareler yöntemi uygulandığında, β 'nın “*Birinci Fark Tahmincisi*” elde edilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 53-54).

Birinci Farklar Yönteminin Ardındaki Varsayımlar

Birinci farklar dönüşümünden elde edilen modelin, havuzlanmış en küçük kareler yöntemi ile tutarlı tahminini elde edebilmek aşağıdaki varsayımlar gereklidir:

BF 1: $E(\Delta X'_{it} \Delta u_{it}) = 0$

BF 2: $rank\left(\sum_{t=2}^T E(\Delta X'_{it} \Delta X_{it})\right) = K : K$, açıklayıcı değişken sayısı olmak üzere

bu varsayıma göre, bağımsız değişkenler arasında tam çoklu doğrusal bağlantı bulunmamaktadır. Sağlanabilmesi için, X değişkenleri arasında zaman değişmezi değişkenleri (cinsiyet, ırk, eğitim gibi) bulunmamalıdır, çünkü bu değişkenler birinci fark dönüşümü sonucunda modelden düşecektir.

BF 3: $E(e_{it}e'_{it} | X_{i1}, \dots, X_{iT}, \mu_i) = \sigma_e^2 I_{T-1}$ ($e_{it} = \Delta u_{it}$): Bu varsayıma göre, fark hata terimleri (e_{it}) homoskedastiktir ve otokorelasyonsuzdur, bir başka ifade ile u_{it} zamana göre rassal yürüyüş süreci izlemektedir.

Bu varsayımlarla, birinci farklar tahmincisi tutarlı ve kendi sınıfındaki tahmincilerden daha etkindir. Bununla birlikte fark alma işlemi ile, gözlem sayısı ve dolaşıyla serbestlik derecesi azalmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 54-55).

Birinci Farklar Yönteminin Özellikleri

1. Birinci fark dönüşümü sonucu birim etki modelden düşmektedir.
2. Birinci fark dönüşümü sonucu modelde eğer varsa sabit terim de düşmektedir.

3. Birinci fark dönüşümü sonucu eğer varsa zaman değişmezi değişkenleri de modelden düşmektedir.
4. Birinci fark modelinde, Y'deki değişme ile X'teki değişme arasında regresyon modeli kurulmuş olmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 55).

TEK YÖNLÜ BİRİM ETKİLİ PANEL VERİ MODELLERİ

Panel verilerin kullanımı ile, her bir birimde gözlenemeyen birim etkilerinin ortaya çıkabilecektir. Eğer bu etkilere hata terimi gibi tesadüfi bir değişken olarak davranılıyorsa, “*tesadüfi etkiler*”; her bir yatay kesit gözlem için tahmin edilen bir parametre olarak davranılıyorsa, “*sabit etkiler*” söz konusu olmaktadır. Genel olarak, eğer yatay kesit boyut büyük bir ana kütteden tesadüfi olarak çekilmişse, tesadüfi etkileri; eğer daha spesifik bir veri seti söz konusu ise, sabit etkileri düşünmek mantıklı olabilmektedir. Ayrıca tesadüfi etkiler modelinde, birim etkiler ile açıklayıcı değişkenler arasındaki korelasyonun sıfır olduğu varsayılmakta iken; sabit etkiler modelinde ise, bu korelasyonun sıfırdan farklı olmasına izin verilmektedir. Bununla beraber tesadüfi etkiler modelinde, zaman değişmezi değişkenlerin varlığına izin verilirken; sabit etkiler modelinde bu tarz değişkenlerin varlığı kısıtlanmıştır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 79).

Sabit Etkiler Modeli

Sabit etkiler modelinde, eğim parametreleri tüm yatay kesit birimler için aynı ($\beta_i = \beta$) iken, sabit parametre birim etki içermesi sebebiyle birimden birime değişmektedir. Diğer bir deyişle, sabit terim her bir yatay kesit birim için farklı değer almaktadır, yani birimler arası farklılıklar sabit terimdeki farklılıklarla ifade edilmektedir. Ayrıca bu modellerde bağımsız değişkenlerin hata terimi ile korelasyonsuz olduğu varsayımı yapılırken, birim etki ile korelasyonlu olmasına izin verilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 79-80).

μ_i , X_{it} ile korelasyonlu olursa, gözlenemeyen birim etkiler ile gözlenebilen zaman değişmezi değişkenleri ayırmak için hiçbir yol yoktur, bu sebeple zaman değişmezi değişkenler X_{it} 'de içerilememektedir. Bununla birlikte, sadece zamana göre değişen değişkenler açıklayıcı değişkenler arasında yer aldığına, modelleme konusunda bir problem olmamaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 80).

Gölge Değişkenli En Küçük Kareler Yöntemi

Farklı birimler için farklı sabitler içeren sabit etkili modeli tahmin etmenin bir yolu, gölge değişkenli en küçük kareler yöntemini kullanmaktır. N yatay kesit birimin var olduğu düşünüldüğünde birim etkileri modele dâhil etmek amacıyla, gölge değişken tuzağına düşmemek için birim sayısından bir eksik (N-1) sayıda gölge değişken kullanılmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 80-81).

$$Y = \mu + X\beta + u$$

Bu modelde, β sabit parametreyi de içeren parametre vektörü ve μ birim etkidir. Farklı birimler için, farklı μ 'ler söz konusu olmaktadır. Hata terimi (u), özdeş ve bağımsız dağılımlı, ortalaması sıfır, varyansı σ_u^2 olan ve normal dağılan bir değişkendir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 81).

Bu model sabit parametre olmadığı durumda i. eşitlik için aşağıdaki gibi ifade edilebilmektedir:

$$Y_i = e\mu_i + X_i\beta + u_i$$

Genel olarak aşağıdaki gibi gösterilebilmektedir:

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & 0 \dots 0 \\ 0 & e \dots 0 \\ \vdots & \ddots \vdots \\ 0 & 0 \dots e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix} \beta + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}$$

Görüldüğü gibi, N tane gölge değişken vardır. Modelde sabit parametre varsa, N-1 sayıda gölge değişken kullanılmalıdır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 81).

Ayrıca aşağıdaki varsayımlar da sağlanmalıdır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 82).

- Hata terimi sıfır ortalamaya sahiptir: $E(u_i) = 0$,
- Hata terimi sabit varyanslıdır: $E(u_i u_i') = \sigma_u^2 I_T$,
- Hata terimi otokorelasyonsuzdur: $E(u_i u_j') = 0 \quad (i \neq j \text{ için})$

Gölge değişkenlerle genişletilmiş bu model HEKK yöntemi ile tahmin edilince β 'nın ve μ 'nün gölge değişkenli en küçük kareler (GDEKK) tahmincisi elde edilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 82).

Gölge Değişkenli En Küçük Kareler Yönteminin Özellikleri

1. T küçükse, μ_i 'nin gölge değişkenli en küçük kareler tahmincisi tutarsızdır.
2. Her bir birim için bir sabit hesaplanması, serbestlik derecesini ciddi bir biçimde azaltmaktadır. Bu nedenle, eğer birim boyutu büyükse, β yukarı doğru sapmalı olabilmektedir.
3. Doğrusal modelde μ_i 'nin tahmincisinin tutarsız olarak tahmin edilmesi, β 'nın tahmincisini etkilememektedir. Çünkü, β 'nın gölge değişkenli en küçük kareler

tahmincisi, birim etkinin gölge değişkenli en küçük kareler tahmincisinin bir fonksiyonu değildir ve β tutarlı tahmin edilebilmektedir.

4. Bu yöntem kullanıldığında, bütün yatay kesit değişkenlik kaybolmakta; katsayıların tahmini için sadece birimler içinde zamana göre değişkenlik kullanılmaktadır.
5. GDEKK yöntemi kullanılarak, belirginlik katsayısı (R^2) hesaplanabilmekte ve yorumlanabilmektedir, fakat çok bilgi verici değildir. Çünkü her bir birim için bir gölge değişken ilave etmek, bağımlı değişkendeki değişimin büyük kısmını açıklayacaktır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 82-83).

Grup İçi Tahmin Yöntemi

Sabit etkiler modelinde öncelikli amaç eğim parametrelerini tahmin etmek ise, açıklayıcı değişkenler matrisinde birim etkileri göstermek için modele gölge değişken ilave etmek gerekli değildir. Grup içi tahmin yönteminde, her bir birim için zaman serisi gözlemlerinden birim ortalamaları çıkarılarak değişkenler dönüştürülmektedir ve bu dönüştürülmüş değişkenlerle oluşturulan regresyona, HEKK uygulanmaktadır. Daha sonra gölge değişken katsayıları, birim ortalamaları yardımıyla tahmin edilebilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 86).

Bu yöntemde birinci farklar yönteminde olduğu gibi, β 'yı tahmin ederken yapılan dönüşüm sonucu öncelikle birim etki (μ_i) elimine edilmeye çalışılmaktadır. Panel veri modeli;

$$Y_{it} = \beta_0 + X_{it}\beta + \mu_i + u_{it} \quad i=1, \dots, N; t=1, \dots, T$$

şeklinde iken, zaman boyutuna göre ortalamalar alınarak başlanılmaktadır:

$$\bar{Y}_i = \beta_0 + \bar{X}_i\beta + \mu_i + \bar{u}_i$$

μ_i ve β_0 zamana göre ortalamasına eşittir. Daha sonra, bu eşitliğin ilk modelden farkı alınmaktadır:

$$(Y_{it} - \bar{Y}_i) = (X_{it} - \bar{X}_i)\beta + (u_{it} - \bar{u}_i)$$

μ_i ve β_0 zamana göre ortalamasına eşit olduğundan modelden düşmüştür (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 86).

Bu modeli aşağıdaki gibi de ifade etmek mümkündür;

$$\ddot{Y}_{it} = \ddot{X}_{it}\beta + \ddot{u}_{it} \quad i=1, \dots, N; t=1, \dots, T$$

Burada,

$$(\ddot{y}_{it} \equiv Y_{it} - \bar{Y}_i), (\ddot{x}_{it} \equiv X_{it} - \bar{X}_i), (\ddot{u}_{it} \equiv u_{it} - \bar{u}_i)$$

eşitlikleri vardır. Bu grup içi dönüşüme, “*zaman kısaltılmışı*”da denilmektedir. Bu nedenle, model “*zaman kısaltılmışı model*” olarak da adlandırılmaktadır. Bu dönüştürülmüş eşitliğe, HEKK yönteminin uygulanması ile β 'nın sabit etkiler tahmincisi elde edilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 87):

$$\hat{\beta}_{GIR} = \left(\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \ddot{x}_{it}' \ddot{x}_{it} \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \ddot{x}_{it}' \ddot{y}_{it} \right)$$

Bu tahminci eğim parametreleri için GDEKK tahmincisine eşittir. Fakat genel olarak, sabit etkiler tahmincisi denilince, gölge değişkenli en küçük karelere göre tahmininin kolay olması ve serbestlik derecesi kaybının daha az olması avantajlarından dolayı grup içi tahminci akla gelmektedir. Bu nedenle, grup içi tahminciye sabit etkiler tahmincisi de denilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 87-88).

Eğim parametresi bu şekilde tahmin edildikten sonra grup içi dönüşümle dışlanan sabit parametre,

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta} \bar{X}$$

şeklinde elde edilebilmektedir. Birim etkiler ise, birim ortalaması regresyonundan hareketle,

$$\hat{\mu}_i = \bar{Y}_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta} \bar{X}_i$$

elde edilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 88).

Sabit Etkiler Modelinin Varsayımları

- **SE 1:** $E(\ddot{u}_{it} | \ddot{x}_i, \mu_i) = 0$: Bu varsayım, bağımsız değişkenler ve birim etkinin hata terimi ile korelasyonsuz olması anlamına gelmektedir; katı dışsallık varsayımadır. Fakat, $E(\mu_i | \ddot{x}_i) \neq 0$ olabilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 88-89).

- **SE 2:** $rank \left[\sum_{t=1}^T E(\ddot{x}_{it}' \ddot{x}_{it}) \right] = K$: Bu varsayım, birimlere ve zamana göre değer alan bağımsız değişkenler arasında tam çoklu doğrusal bağlantı olmaması varsayımadır. Ayrıca X_{it} , zamana göre değişmeyen bir değişken içeriyorsa, $\ddot{x}_{it}$ 'de buna karşılık gelen eleman sıfır olacaktır. Böylece, $\ddot{x}_{it}$ sıfır olan bir kolondan oluşacak, rank düşecek ve SE 2 varsayımı gerçekleşmeyecektir.

SE 1 ve SE 2 varsayımları, sabit etkiler tahmincisinin tutarlılığını sağlamaktadır. SE 3'ün ilavesi ile etkin olacaktır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 89).

- **SE 3:** $E(\ddot{u}_i' \ddot{u}_i | \ddot{x}_i, \mu_i) = \sigma_u^2 I_T$: Bu varsayım homoskedasite ve otokorelasyon-suzluk varsayımlarıdır; koşullu varyanslar sabittir ve koşullu kovaryanslar sıfırdır. Bu varsayımın ilavesi ile, sabit etkiler tahmincisi DESTE olmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 89).

Grup İçi Tahmin Yönteminin Özellikleri

1. Eğim parametrelerinin grup içi (kovaryans) tahmincisi sapmasızdır ve hem birim (N), hem de zaman (T) ya da her ikisi de sonsuza gittiği zaman bile tutarlıdır.
2. $\hat{\beta}$ 'nin varyans kovaryans matrisi şöyledir: $Var(\hat{\beta}_{KV}) = \sigma_u^2 \left[\sum_{i=1}^N X_i' Q X_i \right]^{-1}$
3. μ_i 'nin tahmincisi sapmasız olmasına rağmen, sadece $T \rightarrow \infty$ olduğu durumda tutarlıdır.
4. Birinci farklarda olduğu gibi, zamana göre değişmeyen değişkenler dönüşüm sonucu, birim etki ile birlikte modelden düşmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 90).

Gruplar Arası Tahmin Yöntemi

Grup içi tahmin yönteminin sadece yatay kesit birimlerin içinde zamana göre değişkenlik olduğu durumda kullanılması uygundur. Fakat bazen, sadece yatay kesit boyuttaki gözlemler arasında da değişkenlik olabilmektedir, bu durumda “Gruplar Arası Tahmin Yöntemi”nin kullanılması daha uygun olmaktadır.

Aşağıdaki genel modelden hareket edildiğinde;

$$Y_{it} = \beta_0 + X_{it}\beta + \mu_i + u_{it} \quad i=1, \dots, N; t=1, \dots, T$$

Gruplar arası tahminciyi elde edebilmek için, grup içi tahmin yönteminde olduğu gibi ilk aşamada, her bir değişken için zamana göre birim ortalamaları hesaplanmaktadır:

$$\bar{Y}_i = \beta_0 + \bar{X}_i\beta + \mu_i + \bar{u}_i \quad v_{it} = \mu_i + \bar{u}_i$$

Bu eşitlik, zamana göre ortalamalar alınarak elde edildiği için “*Zaman Ortalamaları Modeli*” adıyla da bilinmektedir. Gruplar arası tahmin yönteminin ikinci aşamasında, bu zaman ortalamaları eşitliğine EKK uygulanarak, β 'nin gruplar arası tahmincisi elde edilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 96).

Gruplar Arası Tahmin Yönteminin Özellikleri

1. SE 1 varsayımı altında gruplar arası tahminci, $E(\bar{X}_i \mu_i)$ 'nin sıfır olmasının önemli olmaması sebebiyle, tutarlı değildir.
2. μ_i , X_{it} ile korelasyonlu değilse bile, gruplar arası tahminci etkin değildir, çünkü ortalamalardan hareket edildiği için veri setindeki zamana ait bilgilerin hepsi yok olmuştur.
3. Genelde gruplar arası tahminci, tesadüfi etkiler tahmincisiyi açıklamak için bir araç olarak yorumlanabilmektedir. Tesadüfi etkiler tahmincisi, sabit etkiler ve gruplar arası tahmincilerin tartılı ortalaması olarak hesaplanabilmektedir.
4. Gruplar arası tahmin yöntemin önemli avantajı, birim etkilerin (μ_i) olmadığı fakat açıklayıcı değişkenlerde ölçme hatalarının olduğu bir model düşünüldüğünde; zamana göre ortalama alınmasının, ölçme hatasını ve ölçme hatasından kaynaklanan sapmayı azaltmasıdır.
5. Gruplar arası TE 1 ve TE 2 varsayımları altında tutarlıdır.
6. Sabit parametre ve zaman değişmezi değişkenleri modelden düşmemekte, ilk aşamada tahmin edilebilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 95-97).

Tesadüfi Etkiler Modeli

Bazen örnekteki birimler tesadüfi olarak seçilmektedir ve bu durumda, birimler arası farklılıklar da tesadüfi olmaktadır. Bu birim farklılıklarına, “*tesadüfi farklılıklar*” denilmektedir. Bu durumda tesadüfi etkiler modelinin kullanımı daha uygun olacaktır. Böylece, tesadüfi etkilerin örnekleme sürecinin bir sonucu olduğu söylenebilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 103).

Tesadüfi etkili modelin bir avantajı, zaman değişmezi değişkenleri modele ilave edebilmektir. Fakat bu avantaj bir maliyet getirmektedir, çünkü bu açıklayıcı değişkenlerin de birim etki ile korelasyonsuz olması ilave varsayımına ihtiyaç duyulmaktadır. Ayrıca farklı yatay kesit birimlerin kalıntılarının birbirinden bağımsız olmasına rağmen, μ_i 'nin varlığı nedeniyle aynı yatay kesit birimlerin kalıntıları arasında korelasyon görülebilecektir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 103-104).

$$Y_{it} = \beta_0 + \beta_1 X_{1it} + \beta_2 X_{2it} + \dots + \beta_k X_{kit} + v_{it} \quad i=1, \dots, N; t=1, \dots, T$$

modelinde birim etki sabit olmadığından sabit parametre içerisinde değil, tesadüfi olduğundan hata payı içerisinde yer almaktadır.

$$v_{it} = u_{it} + \mu_i$$

u_{it} artık hataları gösterirken, μ_i birim hatayı yani, birim farklılıklarını ve zamana göre birimler arasındaki değişmeyi göstermektedir. ($u_{it} + \mu_i$) teriminden dolayı, tesadüfi etkiler modeli, “*Hata Öğeleri Modeli*” ya da “*Hata Bileşenleri Modeli*” olarak da adlandırılmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 104).

Ayrıca Y_{it} ’nin X_{it} ’ye koşullu varyansı,

$$\sigma_v^2 = \sigma_u^2 + \sigma_\mu^2$$

şeklinde gösterilebilmektedir. Bu ifadede σ_u^2 ve σ_μ^2 ; σ_v^2 varyansının bileşenleri olması nedeniyle, tesadüfi etkiler modeline, “*Varyans Öğeleri Modeli*” ya da “*Varyans Bileşenleri Modeli*” de denilebilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 104-105).

Tesadüfi Etkiler Modelinin Varsayımları

Genel Varsayımlar

- Tesadüfi değişkenler μ_i ve u_{it} , her i ve t için birbirleriyle korelasyonsuzdur $[E(\mu_i u_{it}) = 0]$.
- μ_i ve u_{it} ’nin ortalamaları sıfırdır $[E(\mu_i) = 0$ ve $E(u_{it}) = 0]$.
- u_{it} ’nin varyansı: $E(u_{it} u_{it'}) = \begin{cases} \sigma_u^2 & i = i', t = t' \text{ için} \\ 0 & \text{diğer durumlar için} \end{cases}$
- μ_i ’nin varyansı: $E(\mu_i \mu_{i'}) = \begin{cases} \sigma_\mu^2 & i = i' \text{ için} \\ 0 & \text{diğer durumlar için} \end{cases}$
- u_{it} normal dağılmaktadır; $u_{it} \sim N(0, \sigma_u^2)$.
- μ_i normal dağılmaktadır; $\mu_i \sim N(0, \sigma_\mu^2)$.
- X matrisi deterministiktir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 104-105).

Tesadüfi Etkiler Modeline Özgü Varsayımlar

TE 1: $E(v_{it} | X_i) = 0$ ($t = 1, \dots, T$): TE 1 varsayımı katı dışsallık varsayımdır, içerisinde iki varsayım barındırmaktadır:

TE 1a: $E(u_{it} | X_i) = 0$ ($t = 1, \dots, T$): X değişkenleri u_{it} ’ye göre katı dışsaldır.

TE 1b: $E(\mu_i | X_i) = E(\mu_i) = 0$: Birim etki ile X ’ler arasında korelasyon yoktur.

Bu varsayımlarla μ_i stokastik bir değişken olarak düşünülebilmektedir ve “tesadüfi etki” ismini almaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 105).

TE 2: $rank E(X_i' \Omega^{-1} X_i) = K$: Tam çoklu doğrusal bağlantı yoktur.

Ayrıca artık hata ögesi (u_{it}) için aşağıdaki varsayımlar yapılmaktadır:

- $E(u_{it}^2) = \sigma_u^2$ (1) : koşulsuz varyansı sabittir.
- $E(u_{it} u_{is}) = 0$ (2) : koşulsuz kovaryansı sıfırdır (otokorelasyonsuzdur).

Bu varsayımlara ilave olarak $E(\mu_i^2) = \sigma_\mu^2$ ve $E(\mu_i u_{it}) = 0$ varsayımlarından yararlanarak, birleşik hatanın (v_{it}) varyans kovaryans matrisi türetilenmektedir. Varyans,

$$\begin{aligned}\sigma_v^2 &= E(v_{it}^2) = E(\mu_i + u_{it})^2 = E(\mu_i^2) + 2E(\mu_i u_{it}) + E(u_{it}^2) \\ &= \sigma_\mu^2 + \sigma_u^2\end{aligned}$$

şeklinde ve kovaryans ise,

$$\begin{aligned}E(v_{it} v_{is}) &= E[(\mu_i + u_{it})(\mu_i + u_{is})] = E(\mu_i^2) + E(\mu_i u_{it}) + E(\mu_i u_{is}) + E(u_{it} u_{is}) \\ &= E(\mu_i^2) = \sigma_\mu^2\end{aligned}$$

olarak elde edilmektedir. Böylece birleşik hatanın varyans kovaryans matrisi,

$$\Omega = E(v_i v_i') = \begin{bmatrix} \sigma_\mu^2 + \sigma_u^2 & \sigma_\mu^2 & \dots & \sigma_\mu^2 \\ \sigma_\mu^2 & \sigma_\mu^2 + \sigma_u^2 & \dots & \sigma_\mu^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_\mu^2 & \sigma_\mu^2 & \dots & \sigma_\mu^2 + \sigma_u^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_v^2 & \sigma_\mu^2 & \dots & \sigma_\mu^2 \\ \sigma_\mu^2 & \sigma_v^2 & \dots & \sigma_\mu^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_\mu^2 & \sigma_\mu^2 & \dots & \sigma_v^2 \end{bmatrix}$$

şeklinde. T ne olursa olsun Ω matrisi, 2 parametreye (σ_μ^2 ve σ_u^2) bağlıdır.

v_{it} ve v_{is} arasındaki korelasyon ise,

$$corr(v_{it}, v_{is}) = \rho = \left(\sigma_\mu^2 / (\sigma_\mu^2 + \sigma_u^2) \right) = \left(\sigma_\mu^2 / \sigma_v^2 \right) \geq 0$$

şeklinde elde edilmektedir ve bu oran μ_i 'nin önemini ölçmek için bir ölçüttür.

- $E(u_i u_i' | X_i) = E(u_i u_i')$ (3) : u_i 'nin X_i 'ye koşullu varyansı sabittir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 105-106).

TE 3: 1, 2 ve 3 numaralı varsayımlar, tesadüfi etkiler modelinin 3. varsayımını oluşturmaktadır. Bu üç varsayımda özet olarak, homoskedasite, koşulsuz varyansın zamana göre sabit ve otokorelasyonsuz olduğu yer almaktadır. TE 3 varsayımı, etkinlik için gereklidir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 106-107).

$$\text{TE 3a: } E(u_i u_i' | X_i, \mu_i) = \sigma_u^2 I_T$$

$$\text{TE 3b: } E(\mu_i^2 | X_i) = \sigma_\mu^2$$

Tesadüfi Etkiler Modelinin Tahmin Yöntemleri

Grup İçi Tahmin Yöntemi

Tesadüfi etkiler modelinin tahmininde grup içi tahminci aşağıdaki dönüştürülmüş eşitliğe HEKK'in uygulanması ile açıklanabilmektedir;

$$(Y_{it} - \theta \bar{Y}_i) = (1 - \theta) \beta_0 + (X_{it} - \theta \bar{X}_i) \beta + \{(1 - \theta) \mu_i + (u_{it} - \theta \bar{u}_i)\}$$

ya da kısaca,

$$(Y_{it} - \theta \bar{Y}_i) = (X_{it} - \theta \bar{X}_i) \beta + (v_{it} - \theta \bar{v}_i)$$

şeklinde gösterilebilmektedir. Burada,

$$\hat{\theta} = 1 - \sqrt{\frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + T \sigma_\mu^2}}$$

eşitliği vardır. θ , σ_u^2 ve σ_μ^2 'nin bir fonksiyonudur.

- $\sigma_\mu^2 = 0$ ise, μ_i de sıfırdır. $\hat{\theta} = 0$ olduğundan eşitlik HEKK tahmincisine eşittir.
- $\hat{\theta} = 1$ ise eşitlik, sabit etkiler için GİT'ye eşittir.

Bu eşitlik “yaklaşık kısaltılmış” olarak adlandırılmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 107-108).

En Çok Olabilirlik Yöntemi

Tesadüfi etkiler modeli, En Çok Olabilirlik (EÇO) yöntemi ile de tahmin edilebilmektedir. μ_i ve u_{it} , tesadüfi ve normal dağıldığı zaman, olabilirlik fonksiyonunun logaritması şöyledir:

$$\begin{aligned}\log L &= -\frac{NT}{2} \log 2\pi - \frac{N}{2} \log |\Omega| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (Y_i - e\beta_{0i} - X_i\beta)' \Omega^{-1} (Y_i - e\beta_{0i} - X_i\beta) \\ &= -\frac{NT}{2} \log 2\pi - \frac{N(T-1)}{2} \log \sigma_v^2 - \frac{N}{2} \log (\sigma_u^2 + T\sigma_\mu^2) \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma_v^2} \sum_{i=1}^N (Y_i - e\beta_{0i} - X_i\beta)' Q (Y_i - e\beta_{0i} - X_i\beta) \\ &\quad - \frac{T}{2(\sigma_u^2 + T\sigma_\mu^2)} \sum_{i=1}^N (\bar{Y}_i - \beta_{0i} - \bar{X}_i'\beta)^2\end{aligned}$$

Burada $|\Omega| = \sigma_v^{2(T-1)} (\sigma_u^2 + T\sigma_\mu^2)$ 'dir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 108).

$(\beta_{0i}, \beta', \sigma_v^2, \sigma_\mu^2) = \delta'$ 'nin en çok olabilirlik tahmincisi, aşağıdaki birinci mertebeden türevlerin alınıp sıfıra eşitlenmesiyle elde edilmektedir:

$$\frac{\partial \log L}{\partial \beta_{0i}} = \frac{T}{(\sigma_u^2 + T\sigma_\mu^2)} \sum_{i=1}^N (\bar{Y}_i - \beta_{0i} - \bar{X}_i'\beta) = 0$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \beta} = \frac{1}{\sigma_u^2} \left[(Y_i - e\beta_{0i} - X_i\beta)' Q X_i - \frac{T\sigma_u^2}{(\sigma_u^2 + T\sigma_\mu^2)} \sum_{i=1}^N (\bar{Y}_i - e\beta_{0i} - \bar{X}_i'\beta) \bar{X}_i' \right] = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \log L}{\partial \sigma_v^2} &= -\frac{N(T-1)}{2\sigma_u^2} - \frac{N}{2(\sigma_u^2 + T\sigma_\mu^2)} + \frac{1}{2\sigma_u^4} \sum_{i=1}^N (Y_i - e\beta_{0i} - X_i\beta)' Q (Y_i - e\beta_{0i} - X_i\beta) \\ &\quad + \frac{T}{2(\sigma_u^2 + T\sigma_\mu^2)^2} \sum_{i=1}^N (\bar{Y}_i - \beta_{0i} - \bar{X}_i'\beta)^2 = 0\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \sigma_\mu^2} = -\frac{NT}{2(\sigma_u^2 + T\sigma_\mu^2)} + \frac{T^2}{2(\sigma_u^2 + T\sigma_\mu^2)} \sum_{i=1}^N (\bar{Y}_i - \beta_{0i} - \bar{X}_i'\beta)^2 = 0$$

Bu denklemlerin eşanlı olarak çözümü oldukça karmaşıktır, çözüm için Newton-Raphson iteratif süreci kullanılabilir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 109).

En Çok Olabilirlik Yönteminde Karşılaşılan Sorunlar

- Normallik varsayımı altında, olabilirlik fonksiyonu doğrusal değildir. Doğrusal olmama özelliği, bu fonksiyonun tahmin edilmesini güçleştirmektedir.
- Olabilirlik fonksiyonu, küresel içbükey değildir ve bu nedenle çoklu yerel maksimuma izin verilmemektedir.

- Varyans bileşenlerinin tahmini, uygulamada negatif olabilmektedir. Bu durumda kısıtlı en çok olabilirlik tahminine başvurulmalıdır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 111).

Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Yöntemi

μ_i ve β 'nin etkin tahmincilerini elde etmek için, genelleştirilmiş en küçük kareler (GEKK) kullanılabilir. $\delta = (\mu_i, \beta)$ için GEKK tahmincisi aşağıdaki gibi elde edilebilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 113):

$$\hat{\delta}_{GEKK} = \left[\sum_{i=1}^N \bar{X}_i' \Omega^{-1} \bar{X}_i \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^N \bar{X}_i' \Omega^{-1} \bar{Y}_i \right]$$

Burada Ω , v_{it} 'nin varyans kovaryans matrisidir:

$$\Omega \equiv E(v_i v_i') = \sigma_u^2 I_t + \sigma_\mu^2 e e'$$

Bu matrisin tersi ise:

$$\Omega_i^{-1} = \frac{1}{\sigma_v^2} \left[I_T - \frac{\sigma_\mu^2}{\sigma_u^2 + T \sigma_\mu^2} e e' \right]$$

$$\Omega^{-1} = \frac{1}{\sigma_v^2} \left[\left(I_T - \frac{1}{T} e e' \right) + \psi \frac{1}{T} e e' \right] = \frac{1}{\sigma_v^2} \left[Q + \psi \frac{1}{T} e e' \right]$$

Burada:

$$\psi = \frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + T \sigma_\mu^2}$$

Böylece aşağıdaki eşitlik yazılabilmektedir:

$$\left[W_{\bar{X}\bar{X}} + \psi B_{\bar{X}\bar{X}} \right] \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta} \end{bmatrix}_{GEKK} = \left[W_{\bar{X}\bar{Y}} + \psi B_{\bar{X}\bar{Y}} \right]$$

Bu eşitlik çözüldüğünde aşağıdaki eşitlik elde edilmektedir:

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta} \end{bmatrix}_{GEKK} = \begin{bmatrix} \psi N T & \psi T \sum_{i=1}^N \bar{X}_i' \\ \psi T \sum_{i=1}^N \bar{X}_i & \sum_{i=1}^N \bar{X}_i' Q \bar{X}_i + \psi T \sum_{i=1}^N \bar{X}_i \bar{X}_i' \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \psi N T \bar{Y}_i \\ \sum_{i=1}^N \bar{X}_i' Q \bar{Y}_i + \psi T \sum_{i=1}^N \bar{X}_i \bar{Y}_i \end{bmatrix}$$

Kısmi ters formülü kullanılarak, β vektörü ve β_0 'ın genelleştirilmiş en küçük kareler tahmincileri aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır;

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{GEKK} &= \left[\frac{1}{T} \sum_{i=1}^N X_i' Q X_i + \psi \sum_{i=1}^N (\bar{X}_i - \bar{X})(\bar{X}_i - \bar{X})' \right]^{-1} \left[\frac{1}{T} \sum_{i=1}^N X_i' Q Y_i + \psi \sum_{i=1}^N (\bar{X}_i - \bar{X})(\bar{Y}_i - \bar{Y}) \right] \\ &= \Delta \hat{\beta}_{GAT} + (I_K - \Delta) \hat{\beta}_{GIT} \\ \hat{\beta}_{0,GEKK} &= \bar{Y} - \hat{\beta}_{GEKK}' \bar{X}\end{aligned}$$

Burada Δ :

$$\Delta = \psi T \left[\sum_{i=1}^N X_i' Q X_i + \psi T \sum_{i=1}^N (\bar{X}_i - \bar{X})(\bar{X}_i - \bar{X})' \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^N (\bar{X}_i - \bar{X})(\bar{X}_i - \bar{X})' \right]$$

Görüldüğü gibi, GEKK tahmincisi gruplar arası ve grup içi tahmincilerinin ortalamaların bir ağırlığıdır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 113-114).

Yaklaşık kısaltılmış eşitliğin, HEKK ile tahmini (grup içi tahmin), genelleştirilmiş en küçük kareler tahminine eşittir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 115).

Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Yönteminin Özellikleri

- $\psi \rightarrow 1$ bir başka ifade ile $\sigma_\mu^2 \rightarrow 0$ ise; genelleştirilmiş en küçük kareler tahmincisi havuzlanmış en küçük kareler tahmincisine yaklaşmaktadır.
- $\psi \rightarrow 0$ bir başka ifade ile $\sigma_\mu^2 \rightarrow \infty$ ya da $T \rightarrow \infty$ ise; β 'nın genelleştirilmiş en küçük kareler tahmincisi, sabit etkiler grup içi tahminci haline gelmektedir ve bu durumda değişkenliğin kaynağı hiç önemsenmemektedir.
- TE 1 ve TE 2 varsayımları altında, genelleştirilmiş en küçük kareler tahmincisi, tutarlı fakat sapmalıdır (Ω biliniirse, sapmasız olabilmektedir).
- GEKK tahmincisi, grup içi ve gruplar arası tahmincilerin tartılı bir ortalama matrisi olarak açıklanabilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 115).

Esnek Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Yöntemi

Tesadüfi etkiler modelinin GEKK yöntemi ile tahmin edilebilmesi için varyans kovaryans matrisinin bilinmesi gerekmektedir, fakat çoğu zaman bilinmemekte ancak tahmin edilebilmektedir. Hata terimlerinin varyans kovaryans matrisinin tahmin edilebildiği varsayımı altında ise, uygun prosedür esnek GEKK yöntemi-dir. Bu nedenle esnek GEKK tahmincisi, tesadüfi etkiler tahmincisi olarak da bilinmektedir. Bu yöntemle açıklayıcı değişkenlerin birleşik hata terimi ile kore-

lasyonsuz olduğu $E(v_{it} | X_i) = 0$ varsayımı altında, tutarlı tahminciler elde edilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 117).

Tesadüfî etkiler tahmincisinin elde edilebilmesi için öncelikle σ_μ^2 ve σ_u^2 , 'nun hesaplanması gerekmektedir. TE 3a varsayımı altında:

$$\hat{\sigma}_v^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T E(v_{it}^2)$$

β 'nın HEKK tahmincisi $\hat{\beta}$ ve HEKK'den elde edilen kalıntılar $\hat{v}_{it}$ olmak üzere, σ_v^2 aşağıdaki gibi tahmin edilmektedir:

$$\hat{\sigma}_v^2 = \frac{1}{NT - K} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \hat{v}_{it}^2$$

σ_μ^2 için tutarlı tahminci şöyledir:

$$\hat{\sigma}_\mu^2 = \frac{1}{[NT(T-1)/2 - K]} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{s=t+1}^T \hat{v}_{it} \hat{v}_{is}$$

σ_u^2 için tutarlı tahminci ise, $\sigma_v^2 = \sigma_\mu^2 + \sigma_u^2$ eşitliğinden yararlanılarak hesaplanmakta ve böylece Ω matrisinin tahmini elde edilebilmektedir. Esnek GEKK tahmincisi, Ω varyans kovaryans matrisinin tersini kullanarak modelin parametrelerini aşağıdaki gibi tahmin etmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 117-118):

$$\hat{\beta}_{TE} = \left(\sum_{i=1}^N X_i' \hat{\Omega}^{-1} X_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^N X_i' \hat{\Omega}^{-1} Y_i \right)$$

Esnek Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Yönteminin Özellikleri

- 1) TE3 varsayımı olmaksızın da β tahmincisi tutarlıdır; TE1 ve TE2 varsayımları tutarlılık için yeterlidir; TE 3 varsayımı ile etkinlik sağlanmaktadır.
- 2) Esnek genelleştirilmiş en küçük kareler, kısıtsız bir varyans tahmincisi (Ω) kullanarak, tutarlı ve N sonsuza giderken asimptotik normaldir.
- 3) TE1-TE3 varsayımları altında esnek GEKK varyans matrisi geçerlidir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 118):

$$A \text{ var}(\hat{\beta}) = \left(\sum_{i=1}^N X_i' \hat{\Omega}^{-1} X_i \right)^{-1}$$

ZAMAN ETKİLİ VE İKİ YÖNLÜ PANEL VERİ MODELLERİ

Zaman Etkili Panel Veri Modelleri

Çok nadir olsa da bazen sadece zaman etkilerinin olduğu (birim etkinin olmadığı) tek yönlü modellerle de karşılaşılabilir. Aşağıdaki panel veri modeli,

$$Y_{it} = \beta_0 + X_{it}\beta + \lambda_t + u_{it} \quad i=1, \dots, N; \quad t=1, \dots, T$$

sadece zaman etkilerinin olduğu tek yönlü bir modeldir. λ_t , zamana göre etkileri temsil eden ve birimlere göre değişmeyen bir değişkendir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 135).

Sabit Etkiler Modeli – Tahmin Yöntemleri

Gölge Değişkenli En Küçük Kareler Yöntemi

Tek yönlü zaman etkileri modeli, GDEKK ile tahmin edilebilmektedir. Her bir zaman dilimi için bir gölge değişken türetilmekte ve modele açıklayıcı değişken olarak dahil edilmektedir. Gölge değişken tuzağına düşmemek için, zaman sayısından bir eksik (T-1) sayıda gölge değişken modele alınmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 135).

Grup İçi Tahmin Yöntemi

Sabit etkiler modelinin tahmininde Grup İçi Tahmin kullanılabilmektedir, burada farklı olarak birim değil zaman ortalamalarından fark alınmaktadır. Zaman ortalamalarından fark alarak dönüştürülmüş model,

$$(Y_{it} - \bar{Y}_{.t}) = (\beta_0 - \beta_0) + \beta_1(X_{it} - \bar{X}_{.t}) + (\lambda_t - \lambda_t) + (u_{it} - \bar{u}_{.t})$$

ya da kısaca,

$$\tilde{y}_{it} = \beta_1 \tilde{x}_{it} + \tilde{u}_{it}$$

şeklinde ifade edilebilmektedir. Burada, $(Y_{it} - \bar{Y}_{.t}) = \tilde{y}_{it}$, $(X_{it} - \bar{X}_{.t}) = \tilde{x}_{it}$ ve $(u_{it} - \bar{u}_{.t}) = \tilde{u}_{it}$ kısaltmaları yapılmıştır. Bu model, HEKK yöntemi ile tahmin edilince grup içi tahminci elde edilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 137).

Sabit Etkiler Modelinin Varsayımları

- **SE 1:** $E(\tilde{u}_{it} | \tilde{x}_{it}, \lambda_t) = 0$: Bağımsız değişkenler katı dışsaldır ve hata terimi ile zaman etkisi arasında da korelasyon yoktur. Fakat bağımsız değişkenler zaman etkisi ile ilişkili olabilmektedir.

- **SE 2:** $rank \left[\sum_{t=1}^T E(\tilde{x}'_{it} \tilde{x}_{it}) \right] = K$: Bağımsız değişkenler arasında tam çoklu doğrusal bağlantı yoktur.
- **SE 3:** $E(\tilde{u}'_i \tilde{u}_i | \tilde{x}_i, \lambda_i) = \sigma_u^2 I_T$: Modelde heteroskedasite ve otokorelasyon yoktur (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 137).

Tesadüfi Etkiler Modeli – Tahmin Yöntemleri

En Çok Olabilirlik Yöntemi

Hata teriminde artık hatanın yanında zaman etkilerinin de yer aldığı tek yönlü model, olabilirlik fonksiyonuna zaman etkisinin eklenmesi ve standart hatasının da diğer parametreler gibi tahminine olanak sağlayacak şekilde düzenlenmesi ile tahmin edilebilmektedir. Varsayımları da tek yönlü birim etkiler modeli için yapılanlarla aynıdır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 139).

Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Yöntemi

Zaman etkisinin (λ_i) bağımsız değişkenler ile korelasyonsuz olduğu varsayımı altında, tesadüfi etkiler için GEKK tahmincisi aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$\hat{\beta}_{GEKK} = [WE_{XX} + \phi_3^2 BE2_{XX}]^{-1} [WE_{XY} + \phi_3^2 BE2_{XY}]$$

burada, WE_{XX} ve WE_{XY} sırasıyla grup içi $X'X$ matrisi ve $X'Y$ vektörünü ifade etmektedir. $BE2_{XX}$ ve $BE2_{XY}$, zaman için yapılan gruplararası dönüşümden elde edilen $X'X$ matrisi ve $X'Y$ vektörünü göstermektedir. Ayrıca $\sigma_v^2 = \sigma_u^2 + \sigma_\lambda^2$ olmak üzere,

$$\rho_\lambda = \sigma_\lambda^2 / \sigma_v^2$$

formülüyle zaman etkisinin önemini ölçen korelasyon katsayısı hesaplanabilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 142).

İki Yönlü Panel Veri Modelleri

Zaman etkilerinin de birim etkiler ile birlikte modele dahil edildiği iki yönlü panel veri modelleri için tahmin yöntemleri, tek yönlü modeller için önerilen tahmin yöntemleri kullanılarak genişletilebilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 143).

İki yönlü panel veri modelleri sabit etkiler varsayımıyla,

$$Y_{it} = \alpha_{it} + \beta X_{it} + u_{it} \quad i=1, \dots, N; \quad t=1, \dots, T$$

$$Y_{it} = \alpha + \beta X_{it} + \mu_i + \lambda_t + u_{it}$$

şekillerinde ve tesadüfi etkiler varsayımıyla,

$$Y_{it} = \alpha + \beta X_{it} + v_{it} \quad (v_{it} = \mu_i + \lambda_t + u_{it})$$

olarak ifade edilebilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 144).

Sabit Etkiler Modeli – Tahmin Yöntemleri

Gölge Değişkenli En Küçük Kareler Yöntemi

Birim ve zaman sayılarından bir eksik sayıda $[(N-1)+(T-1)]$ gölge değişken türetilip modele bağımsız değişkenler olarak dahil edilmekte ve sonra bu model HEKK ile tahmin edilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 144).

Grup İçi Tahmin Yöntemi

Panel veri modeli vektör formunda aşağıdaki gibi tanımlandığında,

$$Y = \beta X + v$$

ve $E_N = I_N - \bar{J}_N$ ve $E_T = I_T - \bar{J}_T$, ayrıca I_N N boyutunun birim matrisi, I_T T boyutunun birim matrisi, J_T T boyutunun birler matrisi ve J_N N boyutunun birler matrisi olmak üzere, $Q = E_N \otimes E_T = I_N \otimes I_T - I_N \otimes \bar{J}_T - \bar{J}_N \otimes I_T + \bar{J}_N \otimes \bar{J}_T$, dir. Bu model Q ile çarpılarak grup içi dönüşüm yapılır;

$$QY = \beta QX + Qv$$

burada $\tilde{Y} = QY$ ve $\tilde{X} = QX$ kısaltmaları yapılırsa, $\tilde{Y}$ 'nin $\tilde{X}$ üzerine regresyonu grup içi tahminciyi,

$$\tilde{\beta} = (X'QX)^{-1} X'QY$$

vermektedir. Bu dönüşüm, μ_i ve λ_t etkilerini modelden düşürmektedir. Ayrıca zaman değişmezi ya da birim değişmezi değişkenleri varsa dönüşümle modelden elimine edilmektedir.

Daha açık olarak sabit etkiler modeli,

$$Y_{it} = \beta_0 + \beta_1 X_{it} + \mu_i + \lambda_t + u_{it}$$

şeklinde iken dönüştürülmüş model,

$$\begin{aligned} (Y_{it} - \bar{Y}_i - \bar{Y}_t) = & (\beta_0 - \beta_0 - \beta_0) + \beta_1 (X_{it} - \bar{X}_i - \bar{X}_t) + (\mu_i - \mu_i) \\ & + (\lambda_t - \lambda_t) + (u_{it} - \bar{u}_i - \bar{u}_t) \end{aligned}$$

ya da $(Y_{it} - \bar{Y}_i - \bar{Y}_t) = \hat{y}_{it}$, $(X_{it} - \bar{X}_i - \bar{X}_t) = \hat{x}_{it}$ ve $(u_{it} - \bar{u}_i - \bar{u}_t) = \hat{u}_{it}$ kısaltmaları ile,

$$\hat{y}_{it} = -\beta_0 + \beta_1 \hat{x}_{it} + \hat{u}_{it}$$

şeklinde ifade edilebilmektedir. Bu son model, HEKK kullanılarak tahmin edilince iki yönlü model için grup içi tahminci elde edilmektedir. Alternatif olarak,

$$\begin{aligned} (Y_{it} - \bar{Y}_i - \bar{Y}_t + \bar{Y}) &= (\beta_0 - \beta_0 - \beta_0 + \beta_0) + \beta_1 (X_{it} - \bar{X}_i - \bar{X}_t + \bar{X}) \\ &+ (\mu_i - \mu_i) + (\lambda_t - \lambda_t) + (u_{it} - \bar{u}_i - \bar{u}_t + \bar{u}) \end{aligned}$$

dönüşümü yapılmakta ve dönüştürülmüş model HEKK ile tahmin edilmektedir. iki dönüşümden elde edilen tahmin sonuçları aynıdır. Modelden düşen sabit parametre ise, genel ortalamalardan yararlanarak hesaplanmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 148-149).

Sabit Etkiler Modelinin Varsayımları

- **SE 1:** $E(\hat{u}_{it} | \hat{x}_i, \mu_i, \lambda_t) = 0$: Bağımsız değişkenler katı dışsaldır, ayrıca hata terimi ile birim ve zaman etkileri arasında korelasyon yoktur. Fakat bağımsız değişkenlerle birim ve zaman etkileri korelasyonlu olabilmektedir.
- **SE 2:** $rank \left[\sum_{i=1}^T E(\hat{x}_{it}' \hat{x}_{it}) \right] = K$: Tam çoklu doğrusal bağlantı yoktur. Bu varsayımın sağlanabilmesi için modelde birim ve zaman değişmezi değişkenlerinin bulunmaması gerekmektedir.
- **SE 3:** $E(\hat{u}_i' \hat{u}_i | \hat{x}_i, \mu_i, \lambda_t) = \sigma_u^2 I_T$: Heteroskedasite ve otokorelasyon yoktur (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 149-150).

Tesadüfi Etkiler Modeli – Tahmin Yöntemleri

X_{it} ; μ_i , λ_t ve v_{it} ile korelasyonsuzsa ve $\mu_i \sim IID(0, \sigma_\mu^2)$, $\lambda_t \sim IID(0, \sigma_\lambda^2)$ ve $v_{it} \sim IID(0, \sigma_v^2)$ varsayımları sağlanıyorsa tesadüfi etkiler modelinden söz edilebilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 152).

Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Yöntemi

Tesadüfi etkiler modelinde hata teriminin varyans kovaryans matrisi;

$$\begin{aligned} \Omega &= E(vv') = Z_\mu E(\mu\mu') Z_\mu' + Z_\lambda E(\lambda\lambda') Z_\lambda' + \sigma_u^2 I_{NT} \\ &= \sigma_\mu^2 (I_N \otimes J_T) + \sigma_\lambda^2 (J_N \otimes I_T) + \sigma_u^2 (I_N \otimes I_T) \end{aligned}$$

şeklinde. Burada, $Z_\mu = I_N \otimes I_T$ ve $Z_\lambda = I_N \otimes I_T$ 'dir. Z_μ birim ve Z_λ zaman gölge değişkenlerini içeren matristir. Aşağıdaki eşitlikler,

$$\Omega = \sum_{i=1}^4 \lambda_i Q_i \quad \text{ve} \quad \Omega^r = \sum_{i=1}^4 \lambda_i^r Q_i$$

yardımla β 'nın GEKK tahmincisi aşağıdaki gibi yazılabilmektedir;

$$\hat{\beta}_{GEKK} = \left[(X'Q_1X)/\lambda_1 + (X'Q_2X)/\lambda_2 + (X'Q_3X)/\lambda_3 \right]^{-1} \\ \left[(X'Q_1Y)/\lambda_1 + (X'Q_2Y)/\lambda_2 + (X'Q_3X)/\lambda_3 \right]$$

burada,

$$\lambda_1 = \sigma_u^2, \lambda_2 = T\sigma_\mu^2 + \sigma_u^2, \lambda_3 = N\sigma_\lambda^2 + \sigma_u^2 \text{ ve } \lambda_4 = T\sigma_\mu^2 + N\sigma_\lambda^2 + \sigma_u^2$$

ve,

$$Q_1 = E_N \otimes E_T, Q_2 = E_N \otimes \bar{J}_T, Q_3 = \bar{J}_N \otimes E_T \text{ ve } Q_4 = \bar{J}_N \otimes \bar{J}_T$$

eşitlikleri vardır. GEKK tahmincisi alternatif olarak aşağıdaki gibi de gösterilebilmektedir:

$$\hat{\beta}_{RE} = \left(WE_{XX} + \phi_2^2 BE1_{XX} + \phi_3^2 BE2_{XX} \right)^{-1} \left(WE_{XY} + \phi_2^2 BE1_{XY} + \phi_3^2 BE2_{XY} \right)$$

Burada, WE_{XX} ve WE_{XY} , grup içi $X'X$ matrisi ve $X'Y$ vektörünü ifade etmektedir. $BE1_{XX}$ ve $BE1_{XY}$ birim boyutu için yapılan aşağıdaki gruplararası dönüşümden elde edilen sırasıyla $X'X$ matrisi ve $X'Y$ vektörünü,

$$(\bar{Y}_i - \bar{Y}) = \beta(\bar{X}_i - \bar{X}) + (\bar{\varepsilon}_i - \bar{\varepsilon})$$

$BE2_{XX}$ ve $BE2_{XY}$ ise, zaman boyutu için yapılan aşağıdaki gruplararası dönüşümden elde edilen sırasıyla $X'X$ matrisi ve $X'Y$ vektörünü,

$$(\bar{Y}_t - \bar{Y}) = \beta(\bar{X}_t - \bar{X}) + (\bar{\varepsilon}_t - \bar{\varepsilon})$$

ifade etmektedir. Dolayısıyla grup içi ve gruplararası parametre tahminleri yukarıda dönüşümleri verilen modellerden,

$$\hat{\beta}_{WE} = WE_{XX}^{-1} WE_{XY}$$

$$\hat{\beta}_{BE1} = BE1_{XX}^{-1} BE1_{XY}$$

$$\hat{\beta}_{BE2} = BE2_{XX}^{-1} BE2_{XY}$$

şeklinde tahmin edilebilmektedir. Burada $\phi_2^2 = \sigma_u^2 / \lambda_2$ ve $\phi_3^2 = \sigma_u^2 / \lambda_3$ eşitlikleri vardır. Ayrıca $\sigma_v^2 = \sigma_u^2 + \sigma_\mu^2 + \sigma_\lambda^2$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \rho_\mu &= \sigma_\mu^2 / \sigma_v^2 & \sigma_v^2 &= \sigma_u^2 + \sigma_\mu^2 + \sigma_\lambda^2 \\ \rho_\lambda &= \sigma_\lambda^2 / \sigma_v^2 \end{aligned}$$

formülleriyle birim ve zaman etkilerinin önemlerini ölçen korelasyon katsayıları hesaplanabilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 152-154).

En Çok Olabilirlik Yöntemi

Hata teriminin tüm bileşenlerinin normal dağıldığı varsayımıyla log-olabilirlik fonksiyonu,

$$\log L = \text{sabit} - \frac{1}{2} \log |\Omega| - \frac{1}{2} (Y - Z\gamma)' \Omega^{-1} (Y - Z\gamma)$$

şeklindedir. En çok olabilirlik tahmincisi, aşağıdaki normal denklemlerin eşanlı olarak çözülmesi ile elde edilebilmektedir:

$$\frac{\partial \log L}{\partial \gamma} = Z' \Omega^{-1} y - (Z' \Omega^{-1} Z) \gamma = 0$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \sigma_u^2} = -\frac{1}{2} \text{tr} \Omega^{-1} + \frac{1}{2} u' \Omega^{-2} u = 0$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \sigma_\mu^2} = -\frac{1}{2} \text{tr} \Omega^{-1} (I_N \otimes J_T) + \frac{1}{2} u' \Omega^{-2} (I_N \otimes J_T) u = 0$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \sigma_\lambda^2} = -\frac{1}{2} \text{tr} \Omega^{-1} (J_N \otimes I_T) + \frac{1}{2} u' \Omega^{-2} (J_N \otimes I_T) u = 0$$

Bu eşitliklerin eşanlı olarak çözülmesi için çeşitli araştırmacılar tarafından önerilen alternatif yöntemler vardır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 155).

Karma Etkiler Modeli

Bazen, birim ve zaman etkisinin bir tanesinin bağımsız değişkenler ile korelasyonlu, diğerinin ise korelasyonsuz olduğu, bir başka ifade ile birisinin sabit diğerinin tesadüfi etkiler varsayımına uygunluk gösterdiği durumla karşılaşılmaktadır. Sabit etkilere uygunluk gösteren etki için gölge değişken ilave edilen model tesadüfi etkiler için kullanılan tahmin yöntemleri ile tahmin edilebilmektedir.

Zaman etkisinin sabit, birim etkinin tesadüfi olduğu model için tahmin;

$$\hat{\beta}_{RE} = (WE_{XX} + \phi_3^2 BE2_{XX})^{-1} (WE_{XY} + \phi_3^2 BE2_{XY})$$

şeklinde yapılmaktadır. Burada, WE_{XX} , WE_{XY} , $BE2_{XX}$ ve $BE2_{XY}$ daha önce tanımlanmıştı. Zaman etkisinin tesadüfi, birim etkinin sabit olduğu model ise,

$$\hat{\beta}_{RE} = (WE_{XX} + \phi_2^2 BE1_{XX})^{-1} (WE_{XY} + \phi_2^2 BE1_{XY})$$

şeklinde tahmin edilebilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 157-158).

PANEL VERİ MODELLERİNİN TAHMİN YÖNTEMLERİ ARASINDA TERCİHLER

Genel olarak, bütün gözlemlerin homojen olduğu yani birim ve/veya zaman etkilerinin olmadığı düşünülüyorsa, klasik modelin; birim ve/veya zaman etkilerinin olduğu düşünülüyorsa sabit ya da tesadüfi etkiler modellerinin kullanılmasının uygun olduğu söylenebilmektedir.

Tahmincilerden hangisinin kullanılacağı kararı önsel olarak yapılabildiği gibi, bu tespit bir takım testler sonucunda da yapılabilmektedir ve test sonuçlarına göre karar verilmesi daha güvenilir olmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 176).

Klasik Modelin Testi

Panel veri modellerinde, klasik modelin geçerliliği bir başka ifade ile birim ve/veya zaman etkilerinin olup olmadığı aşağıdaki testlerle saptanabilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 177).

F Testi

Klasik modelin geçerliliğini çeşitli modellere karşı sınamak için kullanılan bu test, literatürde ANOVA F (ya da kısıtlı F) testi olarak bilinmektedir ve Moulton ve Randolph (1989) tarafından önerilmiştir. Kısıtlı model klasik model olmak üzere, kısıtsız model sabit parametrenin birimlere göre değiştiği, zamana göre değiştiği, hem birimlere hem de zamana göre modeller olabilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 177).

Kısıtlı model:

$$Y_{it} = \beta_0 + \beta_1 X_{1it} + \dots + \beta_k X_{kit} + u_{it} \quad i=1, \dots, N; t=1, \dots, T$$

Bu klasik model HEKK ile tahmin edilmektedir. M birim ve D zaman kukla değişkenlerini ifade etmek üzere, birim ve zaman etkileri içeren kısıtsız model:

$$Y_{it} = \beta_0 + \beta_1 X_{1it} + \dots + \beta_k X_{kit} + \mu_1 M_{1i} + \dots + \mu_{N-1} M_{N-1,i} + \lambda_1 D_{1t} + \dots + \lambda_{T-1} D_{T-1,t} + u_{it} \\ i=1, \dots, N; t=1, \dots, T$$

Bu kısıtsız model ise sabit etkiler varsayımıyla gölge değişkenli en küçük kareler ya da grup içi tahmin yöntemleri ile tahmin edilmektedir. Sınanacak hipotez:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{N-1} = \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{T-1} = 0 \quad (1)$$

ve alternatif hipotez birim ve zaman etkilerinden en az birisinin sıfırdan farklı olduğu şeklinde kurulmaktadır. Bu hipotezi test etmek için test istatistiği:

$$F = \frac{(RRSS - URSS)/(N + T - 2)}{URSS/N(T - 1) - T - K + 2}$$

Burada RRSS: kısıtlı modelin kalıntı kareler toplamı ve URSS: kısıtsız modelin kalıntı kareler toplamıdır. Test sonucunda H_0 hipotezi reddedilemezse birim ve zaman etkileri yoktur, model klasiktir. Reddedildiği durumda ise, aşağıdaki birim ve zaman etkilerinin tek tek olduğu kısıtsız modeller tahmin edilmeli ve hipotezler ayrı ayrı sınanmalıdır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 177-179).

Sadece birim etkinin olduğu kısıtsız model:

$$Y_{it} = \beta_0 + \beta_1 X_{lit} + \dots + \beta_k X_{kit} + \mu_1 M_{li} + \dots + \mu_{N-1} M_{N-1,i} + u_{it} \quad i=1, \dots, N; t=1, \dots, T$$

$$H_0 \text{ hipotezi: } H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{N-1} = 0 \quad (2)$$

$$\text{Test istatistiği: } F = \frac{(RRSS - URSS)/(N - 1)}{URSS/N(T - 1) - K + 1}$$

Sadece zaman etkisinin olduğu kısıtsız model,

$$Y_{it} = \beta_0 + \beta_1 X_{lit} + \dots + \beta_k X_{kit} + \lambda_1 D_{1t} + \dots + \lambda_{T-1} D_{T-1,t} + u_{it} \quad i=1, \dots, N; t=1, \dots, T$$

$$H_0 \text{ hipotezi: } H_0: \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{T-1} = 0 \quad (3)$$

$$\text{Test istatistiği: } F = \frac{(RRSS - URSS)/(T - 1)}{URSS/T(N - 1) - K + 1}$$

(2) numaralı hipotez reddedilip (3) numaralı hipotez reddedilemezse tek yönlü birim etkili; (3) numaralı hipotez reddedilip (2) numaralı hipotez reddedilemezse tek yönlü zaman etkili ve hem (2) hem de (3) numaralı hipotezler reddedilirse iki yönlü model geçerlidir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 177-179).

Olabilirlik Oranı Testi

Olabilirlik Oranı (LR) testinde klasik modelin geçerliliği sınanmakta ve kısıtlı ve kısıtsız olmak üzere iki modelden hareket edilmektedir. Kısıtlı model klasik model olmak üzere, kısıtsız model sadece birim etkinin, sadece zaman etkisinin ve

hem birim hem de zaman etkisinin olduğu aşağıdaki tesadüfi etkiler modelleridir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 182):

$$Y_{it} = \beta_0 + \beta_1 X_{1it} + \dots + \beta_k X_{kit} + (\mu_i + \lambda_t + u_{it}) \quad i=1, \dots, N; t=1, \dots, T \quad (1)$$

$$Y_{it} = \beta_0 + \beta_1 X_{1it} + \dots + \beta_k X_{kit} + (\mu_i + u_{it}) \quad i=1, \dots, N; t=1, \dots, T \quad (2)$$

$$Y_{it} = \beta_0 + \beta_1 X_{1it} + \dots + \beta_k X_{kit} + (\lambda_t + u_{it}) \quad i=1, \dots, N; t=1, \dots, T \quad (3)$$

H_0 hipotezi klasik model geçerlidir şeklinde kurulmaktadır, klasik modeli 2. modele karşı sınamak için $H_0: \sigma_\mu=0$, 3. modele karşı sınamak için $H_0: \sigma_\lambda=0$ ve 1. modele karşı sınamak için $H_0: \sigma_\mu=\sigma_\lambda=0$ hipotezleri kurulmaktadır. LR test istatistiği hesaplanırken ilgilenilen tesadüfi etkiler modeli ve klasik model en çok olabilirlik yöntemi ile tahmin edilmekte ve her ikisinden elde edilen log-olabilirlik değerleri kullanılmaktadır. Test istatistiği aşağıdaki gibidir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 182):

$$LR = -2[l(kısıtlı) - l(kısıtsız)]$$

$l(kısıtlı)$ kısıtlı modele yani klasik modele ve $l(kısıtsız)$ ise kısıtsız modele yani ilgilenilen tesadüfi etkiler modeline ait log-olabilirlik değerini ifade etmektedir. LR test istatistiği, q (kısıtlama sayısı) serbestlik dereceli χ^2 dağılımına uymaktadır. Öncelikle iki yönlü model için test yapılmakta ve H_0 hipotezi reddedilemezse klasik modelin geçerli olduğu sonucuna ulaşılmaktadır. H_0 hipotezi reddedilirse, birim ve/veya zaman etkilerinin olduğuna bir başka ifade ile klasik modelin uygun olmadığına karar verilmektedir. H_0 hipotezinin reddi için birim ve zaman etkilerinin standart hatalarından birisinin sıfırdan farklı olması yeterlidir. Bu nedenle, bu durumda birim ve zaman etkinin varlığı için tek tek hipotezler ayrı ayrı sınanmalıdır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 182-183).

Breusch-Pagan Lagrange Çarpımı ve Düzeltilmiş Lagrange Çarpımı Testleri

Breusch-Pagan (1980), birim heterojenliğinin varlığını bir başka ifade ile HEKK modelinin uygun olup olmadığını sınamak için, HEKK modelinin kalıntılarına dayanan Lagrange Çarpımı (LM) testini geliştirmişlerdir. Bu testte, birim etkilerin varyansının sıfır olduğu hipotezi ($H_0: \sigma_\mu^2 = 0$) sınanmaktadır. Breusch-Pagan LM test istatistiği aşağıdaki gibidir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 186):

$$LM = \frac{NT}{2(T-1)} \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^N \left(\sum_{t=1}^T \hat{v}_{it} \right)^2}{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \hat{v}_{it}^2} \right]^2$$

burada $\hat{v}_{it}$, HEKK tahmininden elde edilen kalıntılardır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 186).

Bera, Sosa-Escudero ve Yoon (2001), birim etkinin varlığını sınamak için kullanılan LM testinin birinci mertebeden otokorelasyon varsa, birim etkinin olmadığı temel hipotezinin doğru olsa bile reddedilebileceğini dolayısıyla güvenilir olmayacağını ispatlamışlardır. Bu durumda türettikleri otokorelasyonun varlığında LM testinin düzeltilmiş versiyonunun kullanılmasını önermişlerdir. Düzeltilmiş LM (LM_A) testi aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 186):

$$LM_A = \frac{NT}{2(T-1) \left(1 - \frac{2}{T} \right)} \left[\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^N \left(\sum_{t=1}^T \hat{v}_{it} \right)^2}{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \hat{v}_{it}^2} \right) + 2 \left(\frac{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \hat{v}_{it} \hat{v}_{it-1}}{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \hat{v}_{it}^2} \right) \right]^2$$

Breusch Pagan LM testinin alternatif hipotezi çift taraflıdır ($H_0 : \sigma_\mu^2 \neq 0$), varyansın negatif olamayacağı bilindiğinden alternatif hipotezin tek taraflı olacak şekilde ($H_0 : \sigma_\mu^2 \geq 0$) düzenlenmesi testin gücünü arttırmaktadır. Tek taraflı alternatif hipoteze sahip LM test istatistiği (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 186-187):

$$LM_1 = \sqrt{\frac{NT}{2(T-1)}} \left[\frac{\sum_{i=1}^N \left(\sum_{t=1}^T \hat{v}_{it} \right)^2}{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \hat{v}_{it}^2} - 1 \right]$$

Otokorelasyona karşı dirençli olan tek taraflı alternatif hipoteze sahip düzeltilmiş LM testi (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 187):

$$LM_{1A} = \sqrt{\frac{NT}{2(T-1) \left(1 - \frac{2}{T} \right)}} \left[2 \left(\frac{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \hat{v}_{it} \hat{v}_{it-1}}{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \hat{v}_{it}^2} \right) - \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^N \left(\sum_{t=1}^T \hat{v}_{it} \right)^2}{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \hat{v}_{it}^2} \right) \right]$$

LM test istatistikleri, 1 serbestlik dereceli χ^2 dağılımına uyarken, düzeltilmiş LM test istatistikleri normal dağılıma uymaktadır. H_0 hipotezi reddedilemezse, birim etkilerin varlığı kabul edilmemekte ve klasik modelin uygun olduğu söylenebilmektedir. Tersı durumunda yani H_0 hipotezi reddedilirse, klasik modelin uygun olmadığı sonucuna varılmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 187).

Baltagi ve Li (1990), Breusch-Pagan testini dengesiz panel veri modelleri için genişletmişlerdir. Ayrıca, bu testin zaman etkilerinin varyansının, birim ve zaman etkilerinin varyansının sıfır olduğu hipotezini ($H_0 : \sigma_\lambda^2 = 0$ ve $H_0 : \sigma_\mu^2 = \sigma_\lambda^2 = 0$) araştıran versiyonları da vardır. Ayrıca Baltagi and Li (1991, 1995) birim etkileri ve otokorelasyonu birlikte sınavan birleşik bir test de önermiştir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 187).

Sabit Etkiler Tahmincisi İle Tesadüfi Etkiler Tahmincisi Arasında Tercih Yapmak İçin Kullanılan Testler

Yapılan testler sonucunda birim ve/veya zaman etkilerinin olduğu anlaşılmışsa, bu etkilerin bağımsız değişkenlerle korelasyonlu olup olmadığının belirlenmesi gerekmektedir. Aşağıda, bu amaçla kullanılan testler ele alınmaktadır.

Hausman ve Dirençli (Robust) Hausman Testleri

Tanımlama hatasını sınamak için geliştirilen Hausman (1978) spesifikasyon testi, panel veri modellerinde tahminciler arasında seçim yapmak için kullanılmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 195).

Sabit ve tesadüfi etkiler modelleri arasındaki en önemli farklardan birisi, birim etkilerin bağımsız değişkenlerle korelasyonlu olup olmadığıdır. Birim etki ile bağımsız değişkenler arasında korelasyon yoksa, her iki tahminci de tutarlı olmasına rağmen sabit etkilerin neden olduğu bilgi kaybı nedeniyle tesadüfi etkiler tahmincisi etkindir. Eğer korelasyon varsa, sabit etkiler tahmincisi tutarlı olmasına rağmen tesadüfi etkiler tahmincisi hata teriminin içerisinde yer alan birim etkisinin bağımsız değişkenlerle korelasyonlu olmasının doğurduğu içsellik problemi nedeniyle tutarsızdır. Dolayısıyla bu test, aslında bir dışsallık testidir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 195-196).

- Temel hipotez, “açıklayıcı değişkenler ile hata terimi arasında korelasyon yoktur” şeklindedir. $E(X_{it}u_{it})=0$ varsayımı altında, $E(X_{it}v_{it})=0$ olması $E(X_{it}u_{it})=0$ varsayımının sağlanmasına bağlıdır, dolayısıyla temel hipotez “açıklayıcı değişkenler ile birim etki arasında korelasyon yoktur” şeklinde de ifade edilebilmektedir. Bu durumda, her iki tahminci de tutarlıdır, ancak tesadüfi etkiler tahmincisi etkin olduğundan kullanımı daha uygun olacaktır.

- Temel hipotezin alternatif hipotezine göre, $E(X_{it}u_{it})=0$ varsayımı altında “açıklayıcı değişkenler ile hata terimi korelasyonludur”. Bu durumda, tesadüfi etkiler tahmincisi tutarsızdır; sabit etkiler tahmincisi tutarlı olduğundan tercih edilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 196).

Hausman testi, tesadüfi etkiler tahmincisinin etkin olduğu biçimindeki temel hipotezi k serbestlik dereceli χ^2 dağılımına uyan istatistik yardımıyla test etmektedir. Hausman test istatistiği hesaplanırken tesadüfi etkiler için GEKK tahmincisi ve sabit etkiler için grup içi tahmincinin varyans kovaryans matrislerinin arasındaki farktan yararlanılmaktadır. Hausman testi bu farkın sıfıra eşitliğini test etmektedir. Test istatistiği aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 196):

$$H = (\hat{\beta}_{SE} - \hat{\beta}_{TE})' \left[\text{Avar}(\hat{\beta}_{SE}) - \text{Avar}(\hat{\beta}_{TE}) \right]^{-1} (\hat{\beta}_{SE} - \hat{\beta}_{TE})$$

Bu eşitlikte TE alt indisi tesadüfi etkiler modelinin, SE alt indisi ise sabit etkiler modelinin tahmincilerini göstermekte ve ayrıca $\text{Avar}(\hat{\beta}_{SE})$ ve $\text{Avar}(\hat{\beta}_{TE})$ ise sırasıyla, sabit ve tesadüfi etkiler modellerinin tahmininden elde edilen asimptotik varyans kovaryans matrislerini ifade etmektedir. Asimptotik varyans kovaryans matrisleri ve aralarındaki fark aşağıdaki gibidir;

$$\begin{aligned} \text{Avar}(\hat{\beta}_{FE}) &= \sigma_u^2 \left[E(\ddot{x}_i' \ddot{x}_i) \right]^{-1} / N \\ \text{Avar}(\hat{\beta}_{TE}) &= \sigma_u^2 \left[E(\ddot{x}_i' \ddot{x}_i) \right]^{-1} / N \end{aligned} \quad \ddot{x} = X_{it} - \bar{X}_i \quad \text{ve} \quad \ddot{x}_i = X_{it} - \theta \bar{X}_i$$

$$\begin{aligned} E(\ddot{x}_i' \ddot{x}_i) - E(\ddot{x}_i' \ddot{x}_i) &= E \left[X_i' (I_T - \theta P_T) X_i \right] - E \left[X_i' (I_T - P_T) X_i \right] \\ &= (1 - \theta) E \left[X_i' P_T X_i \right] \\ &= (1 - \theta) E \left[\bar{X}_i' \bar{X}_i \right] \end{aligned}$$

H istatistiği, $\hat{\beta}_{SE}$ ve $\hat{\beta}_{TE}$ ’deki ortak parametre sayısına eşit serbestlik derecesi ile asimptotik χ^2 dağılmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 197).

Sabit tesadüfi etkiler modellerinden elde edilen varyans kovaryans matrislerinin farklarının pozitif tanımlı olmadığı durumda Hausman testi negatif çıkabilecektir. Tesadüfi etkiler modelinin temel hipotez altında tam etkin olabilmesi için modelde etkinliği bozan herhangi bir varsayımdan sapma (heteroskedasite, otokorelasyon gibi) olmamalıdır, aksi takdirde Hausman testi güvenilir değildir. Bu durumda, Hausman testinin bootstrap sonucu elde edilen dirençli varyansları kullanan versiyonu elde edilebilmektedir. Böylece Hausman test istatistiği yerine ro-

bust Hausman test istatistiği aşağıdaki gibi elde edilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 200):

$$H = \left(\hat{\beta}_{SE} - \hat{\beta}_{TE} \right)' \left[V_{bootstrap} \left(\hat{\beta}_{SE} - \hat{\beta}_{TE} \right) \right]^{-1} \left(\hat{\beta}_{SE} - \hat{\beta}_{TE} \right)$$

Burada, $V_{bootstrap} \left(\hat{\beta}_{SE} - \hat{\beta}_{TE} \right)$ sabit ve tesadüfi etkilerin bootstrap sonucu hesaplanmış kovaryans matrisleri arasındaki farkı ifade etmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 200).

Tek yönlü modellerde sabit ve tesadüfi etkiler modelleri arasında tercih yapabilmek için kullanılan Hausman testi, iki yönlü modellerin geçerli olduğu durumda uygun tahminciye karar vermek için de genişletilebilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 203-204).

$$H_0: E(\lambda_i X_{it}) = E(\mu_i X_{it}) = 0 \quad (1)$$

$$H_0: E(\mu_i X_{it}) = 0 \quad (2)$$

$$H_0: E(\lambda_i X_{it}) = 0 \quad (3)$$

(2) ve (3)'de verilen temel hipotezlerin her ikisi de reddedilemezse, iki yönlü tesadüfi etkiler modelinin; her ikisi de reddedilirse, iki yönlü sabit etkiler modelinin geçerli olduğuna karar verilmektedir. (2) numaralı hipotez reddedilirken (3) numaralı hipotez reddedilemezse, birim etkinin sabit ve zaman etkisinin tesadüfi olduğu; aksi durumda da birim etkinin tesadüfi ve zaman etkisinin sabit olduğu karma etkiler modelleri geçerli olmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 204).

Uygulamada zaman etkisinin tesadüfi olması zaman boyutunda çok eksikler olmadığı müddetçe beklenen bir durum olmadığından iki yönlü modelle çalışılırken iki yönlü sabit etkiler ya da zaman etkisinin sabit, birim etkinin tesadüfi olduğu karma etkili modellerle çalışılmaktadır.

Hausman testinin özellikleri aşağıdaki gibidir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 206):

- Hausman testi yapılırken iki varsayım veri kabul edilmektedir; birincisi dışsallık, ikincisi otokorelasyon ve heteroskedastisite olmaması varsayımlarıdır. Hausman testinin, dışsallık varsayımının geçerli, fakat otokorelasyon ve heteroskedastisite olmaması varsayımının geçersiz olduğu durumda gücü yoktur. Bu varsayımın ihlali, Hausman testinin standart olmayan limit dağılımına sahip olmasına ve test sonucunun güvenilir olmamasına neden olmaktadır. Bu durumda dirençli Hausman (rhausman) testi kullanılabilir.

- Sabit etkiler modellerinde zaman değişmezi değişkenlerinin yer alamaması sebebiyle, test sadece hem birimlere hem de zamana (iki boyuta) göre değer alan değişkenlerin parametreleri üzerine kuruludur.
- İki boyuta göre değerlendirilen tüm değişkenlerin testte yer alması gerekli değildir. Test istatistiği, farkın anlamlı olup olmadığına karar vermeyi mümkün hale getirecek şekilde dizayn edilmelidir.
- Bazen tesadüfi etkiler ile sabit etkiler tahmincileri arasındaki fark küçük olmasına rağmen temel hipotez reddedilmekte ya da tersine tesadüfi etkiler ile sabit etkiler tahmincileri arasındaki fark büyük olmasına rağmen büyük standart hatalar yüzünden reddedilememektedir. Bu durum, ikinci tip hata yapmaya sebep olabilmekte ve yanlış olmasına rağmen tesadüfi etkiler modeli seçilmektedir.
- Hausman testi, diğer tahminciler arasında da seçim yapmak için kullanılabilmektedir.

PANEL VERİ MODELLERİNDE TEMEL VARSAYIMLARIN TESTLERİ

Etkinliği Bozan Varsayımlar

Panel veri modellerinde hata teriminin birim içerisinde ve birimlere göre eşit varyanslı (homoskedastik) olduğu varsayılmaktadır. Ayrıca hata teriminin dönemsel ve uzamsal korelasyonsuz olduğu; sırasıyla otokorelasyonsuz ve birimler arası korelasyonsuz olduğu varsayımları da yapılmaktadır. Bu varsayımlar gerçekleştiğinde kalıntının varyans kovaryans matrisi köşegen elemanları kalıntı varyansı olan diyagonal bir matris olmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 221).

Bu problemleri göz ardı ederek tahminler yapmak, parametre varyanslarının dolaşısıyla standart hataların sapmalı olmasına sebep olacağı için etkin tahminler elde edilemeyecektir. Böylece, t istatistikleri ve güven aralıkları da doğruluğunu kaybetmektedir. Bu nedenle öncelikle bu varsayımdan sapmaların varlıkları test edilmeli ve daha sonra ise varlıkları halinde uygun yöntemlerle tahminler yapılmalıdır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 229).

Klasik Modelde Heteroskedasite ve Otokorelasyon

Klasik Modelde Heteroskedasite

Breusch-Pagan / Cook-Weisberg Testi

Klasik modelde heteroskedasitenin Breusch-Pagan (1979)/Cook-Weisberg (1983) testi ile sınanabilmesi için, öncelikle modelin HEKK ile tahmininden kalıntılar

(u_{it}) elde edilmektedir. Daha sonra aşağıdaki regresyon denklemi tahmin edilmektedir:

$$\hat{u}_{it}^2 = \delta_0 + h_{it} \delta + \varepsilon_{it}$$

Burada h_{it} , X_{it} 'nin tümünü, bir alt kümesini ya da bağımlı değişkenin tahmini değerini ($\hat{Y}_{it}$) içerebilmektedir. Temel hipotez:

$$H_0 : \delta = 0 \quad (\text{heteroskedasite yoktur})$$

h_{it} 'nin birleşik anlamlılığı F testi ile sınanmaktadır. Alternatif olarak, tahmin edilen regresyonundan hesaplanan belirginlik katsayısından (R^2) hareketle, $N \cdot R^2$ istatistiği elde edilmektedir. χ^2 dağılan bu istatistik kullanılarak da H_0 hipotezi sınanabilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 230).

White Testi

White (1980), önerdiği yardımcı regresyon modelinde kalıntı karelerinin bağımlı, bağımsız değişkenlerin, karelerinin ve çarpaz çarpımlarının bağımsız değişkenler olarak alarak heteroskedasiteyi snamak için bir süreç önermiştir. Testin ilk aşaması Breusch-Pagan/Cook Weisberg testi ile aynıdır, sadece yardımcı regresyon modeli itibarıyla farklılaşmaktadır. Test, H_0 hipotezi homoskedasite olan ve χ^2 dağılan bir istatistiğe sahiptir. $N \cdot R^2$ değeri hesaplanmakta ve yardımcı regresyon modelinin bağımsız değişken sayısı serbestlik dereceli χ^2 tablo değeri ile karşılaştırılmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 232).

Diğer Testler

Klasik modelde heteroskedasitenin varlığını sınamak için Breusch Pagan ve White testleri dışında çeşitli testler de yapılabilmektedir. Bu testlerin bir kısmı, modelde genel olarak heteroskedasitenin olup olmadığını sınarken, bazıları ise değişken bazlıdır ve tüm testlerin detaylarına temel ekonometri kitaplarından* ulaşılabilmektedir. Bunlar Cook Weisberg testi, King LM testi, LM, LR ve Wald testleri gibidir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 234).

Klasik Modelde Otokorelasyon

Wooldridge'in Testi

Wooldridge (2002), panel veri modellerinde otokorelasyonu sınamak için H_0 hipotezi "birinci mertebeden otokorelasyon yoktur" şeklinde olan bir otokorelas-

* Detaylı bilgi için bkzn. F. Yerdelen Tatoğlu, "Ekonometri: Stata Uygulamalı", "3. Bölüm Temel Varsayımlar, Testleri ve Sapmalar Halinde Düzeltme Yöntemleri", 2023, Beta Basım Yayın AŞ, İstanbul.

yon testi önermiştir. Drukker (2003), yaptığı simülasyon sonuçlarıyla bu testin küçük örneklerde de güçlü olduğunu ispatlamıştır.

Wooldridge'in testinde, birinci farklar modelinden elde edilen kalıntılar kullanılmaktadır. Genel bir panel veri modelinin birinci farkları aşağıdaki gibi yazılabilmektedir:

$$(Y_{it} - Y_{it-1}) = (X_{it} - X_{it-1})\beta + (u_{it} - u_{it-1}) \quad i = 1, \dots, N; \quad t = 1, \dots, T$$

$$\Delta Y_{it} = \Delta X_{it}\beta + \Delta u_{it} \quad \Delta u_{it} = e_{it}$$

Öncelikle birinci farklar modeli tahmin edilmekte ve buradan kalıntılar elde edilmektedir. Daha sonra kalıntıların gecikmeli değeri ile regresyonu alınmaktadır. Wooldridge, u_{it} birinci mertebeden otokorelasyonlu değilse, $\text{corr}(e_{it}, e_{it-1}) = -0.5$ olduğunu ispatlamıştır. Bu bilgi kullanılarak gecikmeli kalıntıların parametrelerinin -0.5'den farklılığı F ya da dirençli olan Wald test kullanılarak test edilmektedir. Eğer katsayı 0.5'den farklı ise, u_{it} birinci mertebeden otokorelasyonludur (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 238-239).

Diğer Testler

Klasik modelde otokorelasyonun varlığını sınamak için Wooldridge'nin testi dışında çeşitli testler de yapılabilmektedir. Tüm testlerin detaylarına temel ekonometri kitaplarından[†] ulaşılabilir. Bunlar Jochmans (2019) tarafından geliştirilen Portmanteau testi, Durbin Watson testi, Breusch Godfrey LM testi, Breusch-Pagan-Godfrey Z testi, Box-Pierce LM testi, Durbin m testi, Von Neuman oranı testi, Baltagi'nin LM ve Z testleri, Wooldridge'nin F ve LM testleri ve Engle LM ARCH testi olarak sayılabilir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 240).

Sabit Etkiler Modelinde Heteroskedasite, Otokorelasyon ve Birimler Arası Korelasyon

Sabit Etkiler Modelinde Birimlere Göre Heteroskedasite

Birimlere Göre Heteroskedasitenin Değiştirilmiş Wald Testi

Birimlere göre heteroskedasitenin, değiştirilmiş (uyarlanmış) Wald testi (Greene, 2000) ile sınanması için temel hipotez:

$$H_0: \sigma_i^2 = \sigma^2 \quad (\text{varyanslar, birimlere göre homoskedastiktir})$$

[†] Detaylı bilgi için bkz. F. Yerdelen Tatoğlu, "Ekonometri: Stata Uygulamalı", "3. Bölüm Temel Varsayımlar, Testleri ve Sapmalar Halinde Düzeltme Yöntemleri", 2023, Beta Basım Yayın AŞ, İstanbul.

Wald test istatistiği:

$$W = \sum_{i=1}^N \frac{(\hat{\sigma}_i^2 - \hat{\sigma}^2)^2}{V_i}$$

Burada $\hat{\sigma}_i^2$, i. yatay kesit birimin kalıntı varyansının tahmincisidir:

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{T_i} \sum_{t=1}^{T_i} \hat{v}_{it}^2$$

Ayrıca:

$$V_i = \frac{(T_i - 1)}{T_i} \sum_{t=1}^{T_i} (v_{it}^2 - \hat{\sigma}_i^2)^2$$

W test istatistiği, N serbestlik derecesi ile χ^2 dağılımına uymaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 244-245).

Değiştirilmiş Wald testinin özellikleri aşağıda özetlenmektedir:

- LM, LR ve Wald testleri gibi değiştirilmiş Wald testi de normal dağılım varsayımının ihlalinde de kullanılabilir.
- Birim boyutunun fazla, zaman boyutunun az olduğu durumlarda testin gücü azalmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 245).

Sabit Etkiler Modelinde Otokorelasyon

Baltagi-Wu'nun Yerel En İyi Değişmez Testi ve Bhargava, Franzini ve Narendranathan'ın Durbin Watson Testi

Baltagi-Wu'nun (1999) Yerel En İyi Değişmez (LBI) testinde temel hipotez:

$$H_0 : \rho = 0$$

Alternatif hipotezler:

$$H_{a1} : \rho > 0 \text{ ya da } H_{a2} : \rho < 0$$

Panel veri modeli matris notasyonunda:

$$Y = X\beta + \text{diag}(\iota_{N_i})\mu + u$$

Burada ι_{N_i} : N boyutunun her bir birim için birim vektörünü ifade etmektedir.

$$u_{it} = \rho u_{it-1} + \varepsilon_{it}$$

Aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\sum_u (\rho) = E(uu') = \sigma_\varepsilon^2 \text{diag}(U_i) = \sigma_\varepsilon^2 \Omega_u(\rho)$$

N boyutunun ortogonal matrisi O_{N_i} :

$$O_{N_i} = (t_{N_i} / \sqrt{N_i}, B_i)$$

Burada B_i , $B_i' t_{N_i} = 0$, $B_i' B_i = I_{N_i-1}$ ve $B_i B_i' = I_{N_i} - \bar{J}_{N_i}$ özelliklerini sağlayan $N_i(N_i-1)$ boyutlu bir matristir. J_{N_i} , N boyutunun her bir birim için birim matrisi olmak üzere:

$$\bar{J}_{N_i} = J_{N_i} / N_i$$

Model, $\text{diag}(B_i')$ ile çarpılırsa:

$$\text{diag}(B_i') Y = \text{diag}(B_i') X \beta + \text{diag}(B_i') u$$

Birim etki, $B_i' t_{N_i} = 0$ olması nedeniyle, modelden düşmüştür. Bu dönüştürülmüş model, kısaca aşağıdaki gibi yazılabilmektedir;

$$\tilde{Y} = \tilde{X} \beta + \tilde{u}$$

Burada:

$$\tilde{Y} = \text{diag}(B_i') Y, \tilde{X} = \text{diag}(B_i') X \text{ ve } \tilde{u} = \text{diag}(B_i') u$$

Yapılan işlemler grup içi dönüşümü, model ise grup içi tahminciyi ifade etmektedir.

LBI testi için d istatistiği:

$$d = \frac{z' A_0 z}{z' z}$$

Burada:

$$A_0 = \left\{ \frac{\partial \Omega_u^{-1}(\rho)}{\partial \rho} \right\} \bigg|_{\rho=0} = - \left(\frac{\partial \Omega_u(\rho)}{\partial \rho} \right) \bigg|_{\rho=0}$$

ve $z = \bar{P}_{\tilde{X}} \tilde{Y}$ 'dir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 247-248).

Bhargava, Franzini ve Narendranathan (1982), AR(1) modeli kullanarak Durbin-Watson (DW) test istatistiği önermiştir. Temel hipotez:

$H_0: \rho=0$ (otokorelasyon yoktur)

ve alternatif hipotez:

$H_a: |\rho|<1$

d istatistiği aşağıdaki gibi elde edilebilmektedir;

$$d = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \left[\tilde{z}_{i,t_{i,j}} - \tilde{z}_{i,t_{i,j-1}} I(t_{i,j} - t_{i,j-1} = 1) \right]^2}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \tilde{z}_{i,t_{i,j}}^2}$$

Burada:

$$\tilde{z} = \text{diag}(B_i B_i') (Y - X \tilde{\beta})$$

$\tilde{\beta}$, modelin HEKK ile tahmininden elde edilmektedir ve $I(t_{i,j} - t_{i,j-1} = 1)$ ise, parantez içindeki önerme doğru ise 1, aksi halde 0 değerini alan bir işaret fonksiyonudur (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s.249).

Baltagi ve Wu'nun LBI ve Bhargava, Franzini ve Narendranathan'ın DW test istatistikleri 2 ile karşılaştırılmakta ve 2' den küçük oldukları durumda modelde otokorelasyon olduğu sonucuna varılmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 249).

Portmanteau Testi

Inoue ve Solon (2006) tarafından geliştirilen Portmanteau testi, hata teriminin varyans-kovaryans matrisinde köşegen dışı elemanlardan herhangi birisinin sıfırdan farklı olup olmadığını sınamaktadır. Dolayısıyla bu test yüksek mertebeden otokorelasyonların sınanması için de uygundur. Temel hipotez “otokorelasyon yoktur” iken, alternatif hipotez mertebe sayısını kısıtı olmadan “bazı mertebelerden otokorelasyon vardır” şeklinde kurulmaktadır. Böylece bu testin bir dezavantajı, kovaryans matrisindeki eleman sayısı, T ile birlikte kuadratik olarak arttıkça, test edilecek hipotez sayısının da artmasıdır. Bu nedenle, bu testte N'in T'den büyük olması istenmektedir. χ^2 dağılımına sahip olan test istatistiği için detaylı bilgiye ana makaleden[‡] ulaşılabilir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 251).

[‡] Inoue A. ve Solon G. (2006), “A Portmanteau Test for Serially Correlated Errors in Fixed Effects Models”, *Econometric Theory*, 22 (5), 835-851.

Sapması Düzeltilmiş LM Testleri

Born ve Breitung (2016) tarafından sapması düzeltilmiş LM testleri geliştirilmiştir: LM(k) ve Q(p). İlk test k. mertebeden otokorelasyonu sınarken, ikinci testte p. mertebeye kadar otokorelasyon sınanmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 252).

Sabit etkiler modelinde k. mertebeden otokorelasyonu sınamak için birim ortalamalarından farkı alınmış hata terimi ile kurulan aşağıdaki eşitlikte,

$$u_{it} - \bar{u}_i = \varsigma(u_{it-k} - \bar{u}_i) + e_{it}$$

$\varsigma = -1/(T-1)$ teriminin anlamlılığı test edilmektedir. Bunun için heteroskedasite ve otokorelasyona karşı dirençli t testi kullanılabilmektedir ve bu test LM(k) testi olarak bilinmektedir. LM(k) istatistiği:

$$LM_k = \frac{\sum_{i=1}^N z_{k,i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N z_{k,i}^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N z_{k,i} \right)^2}}$$

iken burada:

$$z_{k,i} = \sum_{t=k+1}^T \left\{ (u_{it} - \bar{u}_i)(u_{it-k} - \bar{u}_i) + \frac{1}{T-1} (u_{it-k} - \bar{u}_i)^2 \right\}$$

p. mertebeye kadar otokorelasyonu sınavan Q(p) testi, çeşitli gecikmelerdeki birim ortalamalarından farkı alınmış kalıntılar arasındaki korelasyonlar nedeniyle sonlu örnek sapmasına sahiptir. Born ve Breitung (2016) kalıntıları aşağıdaki gibi dönüştürerek bu sapmayı ortadan kaldırmıştır.

$$L_k u_i = \begin{pmatrix} 0_k \\ u_{i1} - \bar{u}_i \\ \vdots \\ u_{i,T-k} - \bar{u}_i \end{pmatrix} + \left(\frac{T-k}{T^2-T} \right) u_i$$

Burada ilk terim, gecikmeli ortalamadan farkı alınmış kalıntıların vektörünü temsil etmektedir, 0_k k sıfırların sütun vektörüdür. Sabit etkilerin kalıntılarını içeren ikinci terim ise, sapmayı ortadan kaldırmaktadır. T arttıkça sıfıra yakınsadığı için özellikle birim sayısı az olduğunda kullanımı uygundur. Test istatistiği:

$$\tilde{Q}_p = \left(\sum_{i=1}^N A_i \right) \left\{ \left(\sum_{i=1}^N A_i' A_i \right) - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N A_i' \right) \left(\sum_{i=1}^N A_i \right) \right\}^{-1} \left(\sum_{i=1}^N A_i' \right)$$

Burada $A_i = u_i' M Z_i$, $Z_i = (L_1 u_i, \dots, L_p u_i)$ ve M matrisi sabit etkilerin kalıntılarını ifade etmektedir. Test istatistiği, p merteye sayısı serbestlik derecesi ile χ^2 dağılımına uymaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 253).

Heteroskedasiye Karşı Dirençli HR Testi

Born ve Breitung (2016) tarafından, sabit etkiler modelinde heteroskedasitenin varlığına karşı dirençli bir otokorelasyon testi geliştirilmiştir. İleriye ve geriye doğru dönüştürülmüş kalıntılar sırasıyla,

$$u_{it}^f = u_{it} - \frac{1}{T-t+1} (u_{it} + \dots + u_{iT})$$

$$u_{it}^b = u_{it} - \frac{1}{t} (u_{i1} + \dots + u_{it})$$

iken aşağıdaki model tahmin edilmektedir:

$$u_{it}^p = \psi u_{it-1}^b + \omega_{it} \quad t \in \{3, 4, \dots, T-1\}$$

Bu modelde, ψ katsayısının anlamlılığını sınamak için heteroskedasiteye karşı dirençli t istatistiği, HR test istatistiği olarak bilinmektedir. Test istatistiği, birinci mertebeden otokorelasyon yoktur temel hipotezi altında standart normal dağılıma sahiptir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 256).

Sabit Etkiler Modelinde Birimler Arası Korelasyon

Panel veri modellerinde genel varsayımlardan bir tanesi, hata terimlerinin birimlere göre bağımsız olmasıdır, fakat uygulamada yatay kesit birimler boyunca hataların eşzamanlı korelasyona sahip olmasına sıklıkla rastlanmaktadır. Bu da, otokorelasyon ve heteroskedasitede olduğu gibi korelasyon matrisinin birim matris olmasını engellemektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 257).

Breusch-Pagan Lagrange Çarpımı Testi

Bu testte, tüm yatay kesit birimlerin kalıntılarına ait korelasyon matrisinin birim matris olduğu hipotezi, bir başka ifade ile birimler arası korelasyon olmadığı temel hipotezi sınanmaktadır. Lagrange Çarpımı (LM) test istatistiği,

$$\lambda_{LM} = T \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \hat{\rho}_{ij}^2$$

şeklinde hesaplanmaktadır. Burada $\hat{\rho}_{ij}^2$: i, j. kalıntının (i. ve j. birimlerin kalıntıları arasındaki) korelasyon katsayısıdır:

$$\hat{\rho}_{ij} = \hat{\rho}_{ji} = \frac{\sum_{t=1}^T \hat{v}_{it} \hat{v}_{jt}}{\left(\sum_{t=1}^T \hat{v}_{it}^2\right)^{1/2} \left(\sum_{t=1}^T \hat{v}_{jt}^2\right)^{1/2}}$$

LM test istatistiği, d (d=N(N-1)/2) serbestlik derecesi ile χ^2 dağılmaktadır. Bu test T'nin büyük, N'in küçük olduğu durumda uygundur (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 257-258).

Pesaran'ın Testi

Pesaran (2004), T'nin küçük ve N'in büyük olduğu durumda birimler arası korelasyonun varlığını test etmek için, Breusch-Pagan LM testine alternatif olarak aşağıdaki test istatistiğini önermiştir. Pesaran'ın CD test istatistiği:

$$CD = \sqrt{\frac{2T}{N(N-1)}} \left(\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \hat{\rho}_{ij} \right)$$

Burada, $\hat{\rho}_{ij}$: i. ve j. kalıntı arasındaki korelasyon katsayısıdır. Test istatistiği, d (=N(N-1)/2) serbestlik derecesi ile χ^2 dağılmaktadır.

Dengesiz panel için ise, Pesaran aşağıdaki test istatistiğini önermiştir;

$$CD = \sqrt{\frac{2}{N(N-1)}} \left(\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \sqrt{T_{ij}} \hat{\rho}_{ij} \right)$$

burada, T_{ij} : i ve j birimleri arasında zaman serisi gözlemlerinin sayısıdır.

Birimler arası korelasyonun olmadığı temel hipotezi altında, $N \rightarrow \infty$ ve T yeterli büyüklükte iken $CD \xrightarrow{d} N(0,1)$ 'dir. Monte Carlo simülasyonları N>T olduğu zaman Pesaran'ın CD testinin performansının Breusch-Pagan LM testine göre daha iyi olduğunu göstermiştir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 259-260).

Friedman'ın Testi

Friedman (1937), birimler arası korelasyonu sınamak amacıyla, Spearman'ın rank korelasyon katsayısı kullanılarak hesaplanan ve parametrik olmayan bir test önermiştir. Friedman'ın test istatistiği:

$$FR = \left[(T-1) \left((N-1) R_{AVE} + 1 \right) \right]$$

Burada R_{AVE} , ortalama Spearman korelasyonu katsayısıdır:

$$R_{AVE} = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \hat{r}_{ij}$$

$\hat{r}_{ij}$, Spearman'ın rank korelasyon katsayısıdır:

$$r_{ij} = r_{ji} = \frac{\sum_{t=1}^T ((\rho_{i,t} - (T+1/2))(\rho_{j,t} - (T+1/2)))}{\sum_{t=1}^T (\rho_{i,t} - (T+1/2))^2}$$

R_{AVE} 'nin büyük değerleri, sıfır olmayan birimler arası korelasyonları göstermektedir. FR istatistiği (T-1) serbestlik derecesi ile asimptotik χ^2 dağılmaktadır ve CD testi ile benzer asimptotik özelliklere sahiptir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 261).

Frees'in Testi

Frees (1995, 2004), birimler arası korelasyonu sınamak amacıyla rank korelasyon katsayılarının karelerinin toplamına dayanan bir test önermiştir. Test istatistiği:

$$FRE = N(R_{AVE}^2 - (T-1)^{-1})$$

Burada, R_{AVE}^2 :

$$R_{AVE}^2 = \left[\frac{2}{N(N-1)} \right]^2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \hat{r}_{ij}^2 \cong \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \hat{r}_{ij}^2$$

$2/N(N-1)$ ile $[2/N(N-1)]^2$ arasındaki fark küçük olduğundan paydada $2/N(N-1)$ 'nin kullanılması yeterlidir. r_{ij} : rank korelasyon katsayısıdır. Frees'in test istatistiği, Q dağılımına uymaktadır. Q dağılımı için kritik değerler:

$$Q = a(T)(\chi_{1,T-1}^2 - (T-1)) + b(T)(\chi_{2,T(T-3)/2}^2 - T(T-3)/2)$$

Burada $\chi_{1,T-1}^2$ ve $\chi_{2,T(T-3)/2}^2$, sırasıyla (T-1) ve $[T(T-3)/2]$ serbestlik dereceleri ile χ^2 dağılan bağımsız tesadüfi değişkenlerdir. Ayrıca:

$$a(T) = 4(T+2) / (5(T-1)^2(T+1))$$

$$b(T) = 2(5T+6) / (5T(T-1)(T+1))$$

$R^2_{AVE} > (T-1)^{-1} + Q_q / N$ ise temel hipotez reddedilmektedir. Burada, Q_q , Q dağılımının q . kartilidir. Dolayısıyla Q dağılımı, iki χ^2 dağılan tesadüfi değişkenin ağırlıklı toplamıdır ve değeri T 'nin büyüklüğüne bağlıdır. Pesaran'ın CD testi ile aynı asimptotik özelliklere sahiptir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 262-263).

Tesadüfi Etkiler Modelinde Heteroskedasite, Otokorelasyon ve Birimler Arası Korelasyon

Tesadüfi Etkiler Modelinde Heteroskedasite

Levene, Brown ve Forsythe'nin Testleri

Varyansların eşitliğini sınamak için türetilen geleneksel F testleri Gauss dağılımını esas almaktadır. Levene (1960), normal dağılım varsayımının gerçekleşmediği durumda da dirençli bir heteroskedasite testi önermiştir. Brown ve Forsythe (1974), Levene'nin test istatistiğindeki ortalama yerine aykırı gözlemlere (sapan değerlere) karşı da dirençli bir yapı sağlayan kırılmış ortalamaya ve medyana dayalı alternatif yerel tahminciler önermişlerdir. Levene'nin testi için istatistik:

$$W_0 = \frac{\sum_i n_i (\bar{Z}_i - \bar{Z})^2 / (g-1)}{\sum_i \sum_j (Z_{ij} - \bar{Z})^2 / \sum_i (n_i - 1)}$$

Burada, X_{ij} i. gruptaki X 'in j. gözlemi olmak üzere, $Z_{ij} = |X_{ij} - \bar{X}_i|$ 'dir. n_i : her bir birimdeki gözlem sayısı ve g : birim sayısıdır. Brown ve Forsythe (1974) tarafından önerilen iki test istatistiğinin ilkinde (W_{50}) $\bar{X}_i$ yerine X_{ij} 'nin i. birim medyanı; ikincisinde (W_{10}) $\bar{X}_i$ yerine X_{ij} 'nin i. birim %10 kırılmış ortalaması yer almaktadır. W_0 'ın kritik değerleri $g-1$ ve $\sum_i (n_i - 1)$ serbestlik derecesi ile Snedecor F tablosundan elde edilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 265-266).

Tesadüfi Etkiler Modelinde Otokorelasyon

Baltagi-Wu'nun Yerel En İyi Değişmez Testi ve Bhargava, Franzini ve Narendranathan'ın Durbin Watson Testi (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 262-263)

Breusch-Pagan Lagrange Çarpanı ve Düzeltilmiş Lagrange Çarpanı Testleri

Baltagi ve Li (1991), tesadüfi etkiler modelinde otokorelasyonun varlığını sınamak için temel hipotezi otokorelasyon yoktur ($H_0: \rho = 0$) şeklinde olan Breusch-Pagan Lagrange Çarpanı (LM) testi temelli bir test geliştirmişlerdir. Test istatistiği:

$$LM = \frac{NT^2}{(T-1)} \left[\frac{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \hat{v}_{it} \hat{v}_{it-1}}{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \hat{v}_{it}^2} \right]^2$$

Burada $\hat{v}_{it}$, havuzlanmış en küçük kareler modelinin tahmininden elde edilen kalıntılardır.

Bera, Sosa-Escudero ve Yoon (2001), otokorelasyonun varlığını sınamak için kullanılan LM testinin modelde tesadüfi birim etki varsa güvenilir olmadığını ispatlamışlardır. Bu durumda, türettikleri tesadüfi birim etkinin varlığında geçerli olan LM testinin düzeltilmiş versiyonunun kullanılmasını önermişlerdir. Düzeltilmiş LM (LM_A) testi aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır:

$$LM_A = \frac{NT^2}{(T-1)\left(1 - \frac{2}{T}\right)} \left[\frac{\left(\frac{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \hat{v}_{it} \hat{v}_{it-1}}{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \hat{v}_{it}^2} \right) + \frac{\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^N \left(\sum_{t=1}^T \hat{v}_{it} \right)^2}{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \hat{v}_{it}^2} \right)}{T}}{T} \right]^2$$

Ayrıca Baltagi ve Li (1991, 1995) otokorelasyon ve tesadüfi birim etkilerin varlığını sınamak için bir LM testi önermişlerdir. Testin temel hipotezi, tesadüfi birim etki ve otokorelasyon yoktur ($H_0 : \sigma_\mu^2 = 0, \rho = 0$) şeklindedir. Önerdikleri LM test istatistiği (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 269-270).:

$$LM = \frac{NT^2}{2(T-1)(T-2)} \times \left[\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^N \left(\sum_{t=1}^T \hat{v}_{it} \right)^2}{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \hat{v}_{it}^2} \right)^2 + 4 \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^N \left(\sum_{t=1}^T \hat{v}_{it} \right)^2}{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \hat{v}_{it}^2} \right) \left(\frac{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \hat{v}_{it} \hat{v}_{it-1}}{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \hat{v}_{it}^2} \right) + 2T \left(\frac{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \hat{v}_{it} \hat{v}_{it-1}}{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \hat{v}_{it}^2} \right)^2 \right]$$

Tesadüfi Etkiler Modelinde Birimler Arası Korelasyon

Tesadüfi etkiler modelinde birimler arası korelasyonun varlığını sınamak için Breusch Pagan LM, Pesaran, Friedman ve Frees'in testleri kullanılabilir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 272-275).

Çoklu Doğrusal Bağlantı

Regresyon modelinde yer alan bağımsız değişkenler arasında doğrusal ilişkiler olmaması sapmasız tahminler elde edilebilmesi için önemlidir. Çoklu doğrusal bağlantının tespiti için birçok kriter ve test kullanılabilir. Burada varyans büyüme faktörü (VİF) ele alınacaktır[§] (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 275).

Yapılan analizler sonucu modelde çoklu doğrusal bağlantı tespit edildiyse, düzeltmek için kullanılabilecek en kolay yöntemler mümkünse örnek sayısını arttırmak ve çoklu doğrusal bağlantıya sebep olan değişken ya da değişkenleri modelden çıkarmaktır. Bununla birlikte çeşitli istatistikî ve ekonometrik yöntemler de kullanılabilir^{**} (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 276).

Varyans Büyütme Faktörü (VİF)

Varyans büyüme faktörü, modelde yer alan bağımsız değişkenlerin tek tek bağımlı değişken, kalan bağımsız değişkenlerin ise bağımsız değişkenler olarak yer aldığı yardımcı regresyon modellerinden elde edilen R^2 değerleri ile hesaplanan bir kriterdir. VİF kriteri:

$$VIF_i = \frac{1}{1 - R_i^2}$$

Burada i ($i=1, 2, \dots$) yardımcı regresyonları ifade etmekte olup sayısı modeldeki bağımsız değişken sayısına eşittir. R_i^2 ve VIF_i ise sırasıyla, her bir yardımcı regresyondan hesaplanan R^2 ve VİF değerlerini göstermektedir. VİF değeri 5'den küçükse ($VIF < 5$) çoklu doğrusal bağlantı yoktur, 5 ile 10 arasındaysa ($5 < VIF < 10$) orta şiddette ve 10'dan büyükse ($VIF > 10$) şiddetli çoklu doğrusal bağlantı olduğu söylenebilir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 276).

[§] Diğer kriterlere, testlere ve detaylar hakkında detaylı bilgi için bkz. F. Yerdelen Tatoğlu, "Ekonometri: Stata Uygulamalı", "3. Bölüm Temel Varsayımlar, Testleri ve Sapmalar Halinde Düzeltme Yöntemleri", 2023, Beta Basım Yayın AŞ, İstanbul.

^{**} Detaylı bilgilere temel ekonometri ve istatistik kitaplarından ulaşılabilir.

Normal Dağılım

Klasik Modelde Normal Dağılımın Testi^{††}

Jarque Bera Testi

Jarque ve Bera (1987) tarafından önerilen bu testte hata teriminin ortalama etrafındaki dağılımının çarpıklık ve basıklık değerinin normal dağılımın çarpıklık ve basıklık değerlerinden istatistiki olarak farklı olup olmadığı sınanmaktadır. Temel hipotez (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 278):

$H_0: S=0$ ve $K=3$ (hata terimleri normal dağılmaktadır)

S (skewness) çarpıklığı ve K (kurtosis) basıklığı ifade etmekte olup normal dağılım için alması gereken değerler sırasıyla 0 ve 3'dür. Dağılımın çarpıklık değeri sıfırdan küçükse (negatifse) sola, büyükse (pozitifse) sağa çarpıktır; basıklık değeri ise üçten büyükse sivri, küçükse basıktır. Jarque Bera testi birleşik hipotezi olan bir testtir ve alternatif hipotez en az birisi normal dağılım için verilen değerden farklıdır şeklindedir. Dolayısıyla, hata terimlerinin normal dağılmaması ya dağılımının sağa ya da sola çarpık olması ($S \neq 0$) ya normal dağılımdan daha basık ya da sivri olması ($K \neq 3$) ya da her ikisinin birden gerçekleşmesi ($S \neq 0$ ve $K \neq 3$) kaynaklıdır. Jarque Bera test istatistiği (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 278):

$$JB = n \left[\frac{S^2}{6} + \frac{(K-3)^2}{24} \right]$$

Burada S ve K momentler yardımıyla elde edilmektedir:

$$S = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \text{ ve } K = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

Burada:

$$\mu_1 = \frac{\sum_{i=1}^N \hat{u}}{n}, \mu_2 = \frac{\sum_{i=1}^N \hat{u}^2}{n} = \sigma^2, \mu_3 = \frac{\sum_{i=1}^N \hat{u}^3}{n} \text{ ve } \mu_4 = \frac{\sum_{i=1}^N \hat{u}^4}{n}$$

Formüllerde n ile ifade edilen gözlem sayısı yerine panel verilerle çalışıldığı için NT kullanılmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 278).

^{††} Detaylı bilgi için bkz. F. Yerdelen Tatoğlu, “Ekonometri: Stata Uygulamalı”, “3. Bölüm Temel Varsayımlar, Testleri ve Sapmalar Halinde Düzeltme Yöntemleri”, 2023, Beta Basım Yayın AŞ, İstanbul.

Jarque Bera test istatistiği iki serbestlik dereceli χ^2 dağılımına ($JB \sim \chi^2_2$) uyaktadır. H_0 hipotezi reddedilemezse, hata teriminin normal dağıldığı sonucuna varılmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 279).

D'Agostino, Belanger ve D'Agostino Testi

D'Agostino, Belanger ve D'Agostino (1990), çarpıklık ve basıklığın ayrı ayrı ve birlikte sınanması için bir test süreci önermiştir. Temel hipotezler sırasıyla:

$$H_0: S=0 \quad (\text{çarpıklık sıfırdır}) \quad (1)$$

$$H_0: K=3 \quad (\text{basıklık üçtür}) \quad (2)$$

$$H_0: S=0, K=3 \quad (\text{hata terimleri normal dağılmaktadır}) \quad (3)$$

Çarpıklığın testi için test istatistiği:

$$Z_1 = \frac{1}{\sqrt{\ln W}} \ln \left[\frac{Y}{\alpha} + \left\{ \left(\frac{Y}{\alpha} \right)^2 + 1 \right\}^{1/2} \right]^{-1}$$

Bu test istatistiği temel hipotez altında yaklaşık standart normal dağılıma sahiptir. Burada (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 281).:

$$Y = S \left\{ \frac{(n+1)(n+3)}{6(n-2)} \right\}^{1/2}$$

$$W^2 = -1 + \left[2 \{ \beta_2(S) - 1 \} \right]^{1/2}$$

$$\beta_2(S) = \frac{3(n^2 + 27n - 70)(n+1)(n+3)}{(n-2)(n+5)(n+7)(n+9)}$$

$$\alpha = \left\{ \frac{2}{W^2 - 1} \right\}^{1/2}$$

Basıklığın testi için ise test istatistiği:

$$Z_2 = \frac{1}{\sqrt{2/(9A)}} \left[\left(1 - \frac{2}{9A} \right) - \left\{ \frac{1 - (2/A)}{1 + X \sqrt{2/(A-4)}} \right\}^{1/3} \right]$$

Bu test istatistiği de temel hipotez altında yaklaşık standart normal dağılıma sahiptir. Burada (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 281-282).:

$$X = \frac{K - E(K)}{\sqrt{\text{var}(K)}}$$

$$E(K) = \frac{3(n-1)}{(n+1)}$$

$$\text{var}(K) = \frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}$$

$$A = 6 + \frac{8}{\sqrt{\beta_1(K)}} \left[\frac{2}{\sqrt{\beta_1(K)}} + \left\{ 1 + \frac{4}{\sqrt{\beta_1(K)}} \right\}^{1/2} \right]$$

$$\sqrt{\beta_1(K)} = \frac{6(n^2 - 5n + 2)}{(n+7)(n+9)} \left\{ \frac{6(n+3)(n+5)}{n(n-2)(n-3)} \right\}^{1/2}$$

Normal dağılımı sınamak için birleşik test istatistiği:

$$Z_{1,2}^2 = Z_1^2 + Z_2^2$$

Bu test istatistiği normal dağılım temel hipotezi altında 2 serbestlik dereceli χ^2 dağılımına sahiptir.

Royston (1991), test için aşağıdaki düzeltmeyi önermiştir:

$$Z_c = -\Phi^{-1} \left\{ \exp \left(-\frac{1}{2} Z^2 \right) \right\}$$

$$Z_t = 0.55n^{0.2} - 0.21$$

burada $\Phi(x)$, x için kümülatif standart normal dağılım fonksiyonunu ve $\Phi^{-1}(x)$ ise kümülatif standart normal dağılım fonksiyonunun tersini ifade etmektedir ($x = \Phi^{-1} \{ \Phi(x) \}$) ve,

$$a_1 = (-5 + 3.46 \ln n) \exp(-1.37 \ln n)$$

$$b_1 = 1 + (0.854 - 0.148 \ln n) \exp(-0.55 \ln n)$$

$$a_2 = a_1 - \left\{ \frac{2.13}{(1 - 2.37 \ln n)} \right\} Z_t$$

$$b_2 = \frac{2.13}{(1 - 2.37 \ln n)} + b_1$$

olmak üzere $Z_c < 1$ ise $Z = Z_c$ 'dir, $Z_c < Z_t$ ise $Z = a_1 + b_1 Z_c$, diğer durumlarda $Z = a_2 + b_2 Z_c$ 'dir. $P = 1 - \Phi(Z)$ olarak tanımlandığında $Z_{1,2}^2 = -2 \ln P$ olarak hesaplanmaktadır ve bu test istatistiği 2 serbestlik dereceli χ^2 dağılımına sahiptir. Formüllerde n ile ifade edilen gözlem sayısı yerine panel verilerle çalışıldığı için NT kullanılmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 282-283).

Sabit Etkiler Modelinde Normal Dağılımın Testi

Sabit etkiler modelinde normal dağılım varsayımını sınamak için Jarque Bera Testi ve D'Agostino, Belanger ve D'Agostino Testi kullanılmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 285-287).

Tesadüfi Etkiler Modelinde Normal Dağılımın Testi

Tesadüfi etkiler modeli için D'Agostino, Belanger ve D'Agostino Testi kullanılmaktadır. Tesadüfi etkiler için bu testin farkı, tesadüfi etkiler modelinde hata terimi iki bileşenden (μ_i ve u_{it}) oluştuğu için bu iki bileşen için ayrı ayrı normal dağılım varsayımının sınanmasıdır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 287-289).

Spesifikasyon Testleri

Klasik Modelde Spesifikasyon Testleri

Ramsey RESET Testi

Ramsey (1969), model spesifikasyonunun doğru olup olmadığının belirlenmesi için bir test önermiştir ve bu test literatürde spesifikasyon hatasının sınanması için en çok kullanılan testtir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 281). Aşağıdaki model ele alındığında:

$$Y = X\beta + u$$

Burada X , $NT \times k$ boyutludur ve u 'nun sıfır ortalama ile normal dağıldığı varsayılmaktadır. Modelde spesifikasyon hatası varsa, $E[u|X] = \zeta \neq 0$ 'dır. Ramsey RESET testinde ζ , $Z\theta$ olarak düşünülmekte ve aşağıdaki modelde $H_0: \theta=0$ hipotezi sınanmaktadır:

$$Y = X\beta + Z\theta + u$$

Hatalar bağımsız, X stokastik değil ve Z sadece en küçük kareler tahmincilerinin bir fonksiyonu olarak tesadüfi ise; Milliken ve Graybill (1970), RESET istatistiğinin H_0 hipotezi altında F dağıldığını ispatlamışlardır. b , β 'nın en küçük ka-

reler tahmincisi olmak üzere genelde $Z=[(Xb)^2, (Xb)^3, \dots, (Xb)^{p+1}]$ olarak kullanılmaktadır; bu da $Z=(\hat{Y}^2, \hat{Y}^3, \dots, \hat{Y}^{p+1})$ 'yi ifade etmektedir. Ramsey ve Gilbert (1972) ve Thursby (1989) $p=1, 2, 3$ alınabileceğini söylemişlerdir ($p=1$: $Z=\hat{Y}^2$, $p=2$: $Z=(\hat{Y}^2, \hat{Y}^3)$ gibi değer almaktadır). DeBenedictis ve Giles (1998) ise $p=3$ 'ü önermişlerdir. Temel hipotez:

$$H_0 : \theta = 0 \quad (\text{model spesifikasyonu doğrudur})$$

şeklinde kurulmaktadır. İlk model kısıtlı, ikinci (Z 'yi içeren) model kısıtsız model iken spesifikasyon hatasını sınamak için aşağıdaki kısıtlı F testi yapılmaktadır:

$$F = \frac{(R_{UR}^2 - R_R^2)/p}{(1 - R_{UR}^2)/(NT - K - p)}$$

Burada R_{UR}^2 kısıtsız modelin; R_R^2 ise kısıtlı modelin belirginlik katsayısını ifade etmektedir. Hesaplanan F değeri p, NT-K-p serbestlik dereceli F dağılımına uyumaktadır. H_0 hipotezi reddedilirse, spesifikasyon hatasının olduğuna karar verilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 281-282).

DeBenedictis ve Giles RESET Testleri

Ramsey RESET testinin gücü modele eklenen polinomial yapıdaki değişkenlerin modele dahil edilme biçimine bağlıdır; Z tesadüfi olduğu için RESET testinin dağılımı alternatif hipotez altında standart değildir. Ayrıca bağımsız değişkenler tesadüfi ve/veya hata terimleri otokorelasyonlu ise, RESET istatistiği temel hipotez altında F dağılmayacaktır (Breusch ve Pagan, 1984; Porter ve Kashyap, 1984; Godfrey, 1988; DeBenedictis ve Giles (1998)), Ramsey RESET testinin düşük güce sahip ve sapmalı bir test olduğunu göstermişler ve sadece lokal geçerliliği olan Taylor (polinom) yerine global geçerliliği olan Fourier yaklaşımını kullanarak RESET testini modifiye etmişlerdir. DeBenedictis ve Giles (1998), Z 'yi $Z = [\sin(w), \cos(w), \sin(2w), \cos(2w), \dots, \sin(p'w), \cos(p'w)]$ olarak önermişlerdir. w , aşağıdaki gibi doğrusal dönüşüme (Mitchell ve Onvural, 1996) (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 290-291):

$$w = \pi \frac{2(Xb) - [(Xb)_{\max} - (Xb)_{\min}]}{(Xb)_{\max} - (Xb)_{\min}}$$

veya sinüs dönüşümüne (Box, 1966):

$$w = 2\pi \sin^2(Xb) - \pi$$

sahip olacak şekilde türetilmektedir. İlk dönüşümdeki gibi türetildiği durumda RESET S ve ikinci dönüşümdeki gibi türetildiği durumda RESET L testi adını almaktadır. Her iki test de, Milliken ve Graybill (1970) koşullarının sağlandığı varsayımıyla temel hipotez altında $2p'$ ve $(NT - k - 2p')$ serbestlik dereceleriyle F dağılımına sahiptir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 291).

Sabit Etkiler Modelinde Spesifikasyon Testleri

Ramsey RESET Testi

Sabit etkiler modelinde spesifikasyon hatasını sınamak için Ramsey RESET testi kullanılabilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 295).

DeBenedictis ve Giles RESET Testleri

Sabit etkiler modelinde spesifikasyon hatasını sınamak için DeBenedictis ve Giles RESET testi kullanılabilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 295).

Tesadüfi Etkiler Modelinde Spesifikasyon Testleri

Ramsey RESET Testi

Tedadüfi etkiler modelinde spesifikasyon hatasını sınamak için Ramsey RESET testi kullanılabilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 297).

DeBenedictis ve Giles RESET Testleri

Tesadüfi etkiler modelinde spesifikasyon hatasını sınamak için DeBenedictis ve Giles RESET testi kullanılabilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 297).

Yapısal Değişiklik

Panel veri modellerinde, zaman serisi modellerinde olduğu gibi tahmin edilen parametrelerin zamana göre kararlı olması, bir başka ifade ile modelde yapısal değişiklik olmaması gerekmektedir. Panel veri modelleri ile çalışılırken global ve birimlere özgü spesifik şoklar nedeniyle yapısal kırılmalar meydana gelebilmektedir. Burada global şoklar kaynaklı, tüm panel için ortak kırılma tarihinin belirlenmesi ve modellenmesi üzerinde durulacaktır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 298).

Bai-Perron (1998, 2003), Karavias, Narayan, Westerlund (2021) ve Ditzen, Karavias, Westerlund (2021) yapısal kırılmaların varlığını, yapısal kırılmaların sayısı ve yerine karar verilmesi ve kırılma tarihinin güven aralığının belirlenmesi için testler önermişlerdir. Yapısal kırılma tarihi, içsel ya da dışsal şekilde belirlenebilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 298).

Yapısal kırılmanın varlığını sınamak için kısıtlı ve kısıtsız modeller sırasıyla:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t$$

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_1 D_t + \beta_1 D_t X_t + u_t$$

D belirlenen yapısal kırılma tarihi öncesi için 0, sonrası için 1 değerini alan bir kukla değişkendir. Kukla değişken hem tek başına hem de bağımsız değişken ile çarpım durumunda modele ilave edilmiştir, dolayısıyla ilk etapta hem sabitteki hem de eğimdeki yapısal kırılmalar dikkate alınmıştır. Yapısal değişikliğin kukla değişkenlerle ifade edildiği model kısıtsız (UR), yapısal kırılmanın dikkate alınmadığı model ise kısıtlı (R) model olmak üzere Wald test istatistiği aşağıdaki gibidir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 299):

$$Wald = \frac{ESS_R - ESS_{UR}}{ESS_{UR}/n}$$

Çalışılan zaman aralığında tüm mümkün tarihler için Wald istatistiği hesaplanmaktadır ve supremum test istatistiği yapısal değişiklik yoktur temel hipotezini test etmek için hesaplanan Wald test istatistiklerinin maksimumudur. Maksimum değere sahip olan test istatistiğinin verdiği tarih yapısal kırılma tarihi olarak belirlenmektedir:

$$\text{supremum } S_T = \sup_{t_1 \leq t \leq t_2} S_T(t)$$

Burada $S_T(t)$, belirlenen kırılma tarihi t 'deki Wald ya da LR test istatistikleridir.

Test istatistiğinin dağılımı standart değildir. Andrews (1993) dağılımlarını geliştirmiş ve Hansen (1997) yaklaşık asimptotik olasılık değerlerini elde etmiştir.

Bu test bu haliyle yapısal kırılma tarihini içsel olarak belirlemektedir. Ancak test, dışsal olarak belirlenen herhangi bir dönemde yapısal kırılma olup olmadığının belirlenebilmesi için ya da çoklu kırılmayı sınamak için de uyarlanabilmektedir. Dolayısıyla testi içsel-dışsal ve tek ya da çoklu kırılmaya izin verecek şekilde geliştirilmiştir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 299).

Eğer yapısal kırılmanın varlığına karar verilirse, kukla değişkenler yardımıyla modellenebilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 301).

HETEROSKEDASİTE, OTOKORELASYON VE BİRİMLER ARASI KORELASYONUN VARLIĞINDA DİRENÇLİ STANDART HATALAR VE TAHMİNCİLER

Heteroskedasite, otokorelasyon ve birimler arası eşzamanlı korelasyon durumlarında hata teriminin varyans kovaryans matrisi (Ω) kalıntı varyansı ile birim

matrisin çarpımına eşit değildir, bir başka ifade ile $E(u_{it}u'_{it}) \neq \sigma_u^2 I_T$ 'dir, dolayısıyla $E(u_{it}u'_{it}) = \sigma_u^2 \Omega_T$ eşitliği geçerlidir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 327). Bu durumda heteroskedasite, otokorelasyon ve birimler arası korelasyon yokken,

$$\begin{aligned} Var(\hat{\beta}) &= E\left[(X'X)^{-1} X'uu'X (X'X)^{-1}\right] & E(u_{it}u'_{it}) &= \sigma_u^2 I_T \\ &= \sigma_u^2 (X'X)^{-1} X' I X (X'X)^{-1} \\ &= \sigma_u^2 (X'X)^{-1} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilen parametrelerin varyans kovaryans matrisi, heteroskedasite, otokorelasyon veya birimler arası korelasyonun en az bir tanesinin varlığında,

$$\begin{aligned} Var(\hat{\beta}) &= E\left[(X'X)^{-1} X'uu'X (X'X)^{-1}\right] & E(u_{it}u'_{it}) &= \sigma_u^2 \Omega_T \\ &= \sigma_u^2 (X'X)^{-1} X' \Omega X (X'X)^{-1} \\ &= (X'X)^{-1} X' V X (X'X)^{-1} & V &= \sigma_u^2 \Omega \end{aligned}$$

halini almaktadır. Bu durum, büyük örneklerle çalışıldığı zaman tutarsızlığa neden olmamakta, fakat etkinliği etkilemektedir. Bir başka ifade ile, parametre varyanslarının ve dolayısıyla standart hataların, t ve F istatistiklerinin, R^2 'nin ve güven aralıklarının geçerliliği etkilenmektedir. Bu nedenlerle modelde heteroskedasite, otokorelasyon veya birimler arası korelasyondan en az biri varsa ya parametre tahminlerine dokunmadan standart hatalar düzeltilmeli (dirençli-robust standart hatalar kullanılmalı) ya da varlıkları halinde uygun yöntemlerle tahminler yapılmalıdır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 327).

Huber, Eicker ve White Standart Hatalar

Dirençli standart hatalar için ilk çalışmalar Huber (1967), Eicker (1967) ve White (1980) tarafından yapılmıştır. Kalıntıların bağımsız dağılımlı olması durumunda, Ω matrisinin bilindiği ve diyagonal olduğu fakat diyagonal elemanların birbirlerine eşit olmadığı varsayımı altında, bir başka ifade ile sadece heteroskedasite olduğu durumda varyansların tahmini için aşağıdaki tahminciyi önermişlerdir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 328):

$$\begin{aligned} Var(\hat{\beta}) &= (X'X)^{-1} X' V X (X'X)^{-1} \\ Var(\hat{\beta}) &= (X'X)^{-1} X' diag(\hat{u}_i^2) X (X'X)^{-1} \end{aligned}$$

Burada $V = \hat{\sigma}_u^2 \Omega = \text{diag}(\hat{u}_i^2)$ eşitliği kullanılmıştır. Bu, “*Heteroskedastik Dirençli Varyans Tahmincisi*”dir, “*Huber Tahmincisi*”, “*White Tahmincisi*” ya da “*Eicker Tahmincisi*” olarak da bilinmektedir. MacKinnon ve White (1985) ve Hinkley (1977), bu tahminciyi serbestlik derecesi düzeltmesi yaparak küçük örneklerde de kullanılabilecek hale getirmişlerdir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 328):

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\beta}) &= \frac{N}{N-k} (X'X)^{-1} \left(\sum_{i=1}^N \hat{u}_i^2 x_i' x_i \right) (X'X)^{-1} \\ &= \frac{N}{N-k} (X'X)^{-1} X' \text{diag}(u_i^2) X (X'X)^{-1} \end{aligned}$$

Yine aynı araştırmacılar tarafından önerilen başka bir yaklaşımda, küçük örnek düzeltmesi ($N/N-k$) yerine ($1/(1-h_i)$) (h_i : tahmin edilen matrisinin diyagonal elemanlarıdır) ile yapılmaktadır. Long ve Ervin (2000), küçük örnek özelliklerini iyileştirmek ve sapan gözlemlere daha az ağırlık vermek için $1/(1-h_i)^2$ düzeltmesini, Cribari-Neto ve Zarkos (2004) ise, yine özellikle sapan değerlerin varlığında küçük örnek özelliklerini iyileştirmek için, $1/(1-h_i)^{\delta_i}$ düzeltmesini önermiştir (burada $\delta_i = \min\{4, h_i/\bar{h}\}$ ’dir).

Tahmin edilen parametrelerin varyans kovaryans matrisi için önerilen bu tahminciler homoskedastik standart hatalar üretmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 328).

Arellano, Froot ve Rogers Standart Hatalar

Huber, Eicker ve White tahmincilerinden sonra çalışmalar Arellano (1987), Froot (1989) ve Rogers (1993) tarafından geliştirilmiş ve kalıntıların bağımsız dağılımlı olması varsayımının esnekleştiği durumda da tahminler yapılmıştır. Kalıntıların küme (panel veri modellerinde birim) içerisinde korelasyonlu ve kümeler arasında korelasyonsuz olduğu durumda dirençli standart hatalar türetilmiştir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 332). Parametrelerin varyans-kovaryans tahmincisi,

$$\text{Var}(\hat{\beta}) = \frac{N_j - 1}{N_j - k} \frac{M}{M - 1} (X'X)^{-1} \left(\sum_{i=1}^N X_i' \hat{u}_i \hat{u}_i' X_i \right) (X'X)^{-1}$$

şeklinde ifade edilmektedir. Burada M küme (birim) sayısı, N_j kümelerdeki birim (her bir birimdeki zaman boyutu) sayısı, $\hat{u}_i$ j. kümedeki (birimdeki) i. Kalıntıdır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 332-333).

Parks-Kmenta Tahmincisi

Panel veri modellerinde, heteroskedasite yanında dönemsel ve uzamsal korelasyonu dikkate alan ilk çalışma Parks (1967) tarafından yapılmıştır. Parks, daha sonra Kmenta (1986) tarafından tanıtılan esnek GEKK yöntemi temelli bir algoritma önermiştir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 340).

Bu yaklaşımda önce incelenen model EKK ile tahmin edilmekte, buradan elde edilen kalıntılar otokorelasyon ve heteroskedasite için kullanılmakta ve tekrar GEKK ile tahmin yapılmaktadır. Bu süreç, β 'lar sabit bir sayıya yaklaşıncaya kadar tekrarlanmaktadır

Bu metodun, orta ve uzun ölçekli mikro ekonometrik panellerde kullanımı iki sebepten dolayı uygun değildir. Birincisi, bu metod yatay kesit boyut N zaman boyutu T 'den büyükse esnek değildir. Çünkü Parks-Kmenta tahmincisi ve diğer büyük T asimptotik temelli kovaryans matris tahmincileri, $T < N$ olduğu durumda tekil bir $N \times N$ boyutlu yatay kesit kovaryans matrisini tahmin edemeyebilmektedir. İkincisi, Beck-Katz (1995), Parks-Kmenta metodunun çok düşük standart hatalar ürettiğini göstermiştir. Dolayısıyla bu metodla tahmin edilen β 'ların standart hataları aşağıya doğru, t istatistikleri ise yukarı doğru sapmalıdır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 340).

Beck-Katz Tahmincisi

Beck-Katz (1995), "*Panel Düzeltilmiş Standart Hataları*" (PCSE) önermiştir. Beck-Katz (1995), birimler arası korelasyonu düzeltmek için kullanılan ve büyük T asimptotik temelli standart hatalar üreten bu metodun küçük panellerde de kullanımının uygun olduğunu göstermiştir. Bununla birlikte, PCSE tahmincisinin küçük örnek özellikleri, yatay kesit boyut N 'in zaman boyutu T 'den büyük olduğu durumda zayıftır. Çünkü T/N oranı küçükse, Beck-Katz'ın (1995) PCSE metodunun tahminleri, $N \times N$ boyutlu yatay kesit kovaryans matrisinin tahmininin doğru olmayacağı sebebiyle sapmalıdır. Bu nedenle, orta ve uzun mikro ekonometrik panellerle çalışılırken uzamsal bağımlılık için parametrik düzeltme yapılması caziptir. Ayrıca N 'in büyük olduğu durumda güçlü varsayımlara da gerek duyulmaktadır, çünkü gözlem sayısı ve buna bağlı olarak birimler arası korelasyon sayısı N ile artmaktadır. Bu artışın önüne geçebilmek için, uygulamalı araştırmacılar genellikle birimler arası korelasyonun tüm yatay kesit birim çiftleri için aynı olduğu varsayımını kullanmaktadırlar. Fakat, birimler arası korelasyon matrisi için yapılan bu varsayım spesifikasyon hatasına yol açmaktadır, bu nedenle yatay kesit bağımlılık için parametrik olmayan düzeltme yapılması istenilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 347).

Beck-Katz (1995), tahmin için aşağıdaki aşamaları önermiştir:

1. Model EKK ile tahmin edilir.
2. β 'ların standart hatalarının doğru tahminleri "*Panel Düzeltilmiş Standart Hatalar (PCSE)*" kullanılarak tahmin edilir.
3. Kalıntıların örneğin AR (1) yapısına sahip olduğu düşünülüyorsa, Prais-Winsten (1954) gibi temel AR(1) düzeltme yöntemlerinden birisi kullanılarak düzeltme yapılır. Düzeltme yapıldıktan sonra, kalıntılardan panel düzeltilmiş standart hatalar elde edilir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 348).

Beck-Katz'ın panel düzeltilmiş standart hatalarını elde etmek için öncelikle, uygun modelden kümeler (birimlere) göre kalıntılar düzenlenir:

$$U = [\hat{u}_1 \quad \hat{u}_2 \quad \dots \quad \hat{u}_{N-1} \quad \hat{u}_N]$$

Bunların her biri T elemanlı vektörlerdir ve U, $T \times N$ boyutlu bir matristir. $\hat{\beta}$ 'nın panel düzeltilmiş varyans kovaryans matrisi şöyledir;

$$\text{Var}(\hat{\beta})^{PCSE} = (X'X)^{-1} X' \hat{V} X (X'X)^{-1}$$

Bu son tahminci "sandwich tahmincisi"dir, Huber-White dirençli tahmincisine benzemektedir, tek farkı $\hat{V} (= \sigma_u^2 \Omega)$ 'nın farklı şekilde tahmin edilmiş olmasıdır. Beck-Katz'ın kullandığı Ω matrisi şöyledir:

$$\hat{\Omega} = \frac{(E'E)}{T} \otimes I$$

Birinci küme için kalıntı varyansının tahmincisi aşağıdaki gibi elde edilmektedir:

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{T} \{ \hat{e}_{11}^2 + \hat{e}_{12}^2 + \dots + \hat{e}_{1T}^2 \}$$

Bu, birinci birim için ortalama hata karesini vermektedir. Her bir birim için, kendi kalıntısının varyansı, kalıntısının ortalama hata karesidir. Dolayısıyla PCSE, birim içi varyansın her bir küme için sabit olduğu sadece kümeler arasında varyansın değiştiği varsayımıyla tahmin yapmakta, Huber-White tahmincisi ise bu bilgiyi göz ardı etmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 348).

Birimlere göre kovaryanslar ise, iki birimin kalıntıları kullanılarak hesaplanmaktadır. Burada temel varsayım, birimlere göre eşzamanlı korelasyonun sabit bir yapı izlediğidir; bu tüm zaman noktalarına göre kovaryansların ortalamalarıdır.

Monte Carlo simülasyonları, Beck-Katz'ın standart hatalarının Park'ın türettiği standart hatalardan daha düşük olduğunu göstermiştir, Park'ın tahmincisinden

elde edilen t-istatistikleri de varyansın aşağıya doğru sapmalı olması sebebiyle yanlıştır. Ayrıca panel veri modellerinde Huber-White tahmincisi ile karşılaştırıldığında PCSE'nin daha kesin bir tahminci olduğu söylenebilmektedir, çünkü Huber-White tahmincisi kümelemeyi dikkate almamanın dezavantajına sahiptir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 349).

AR(1) Kalıntılı Doğrusal Regresyon Modeli

AR(1) kalıntılı regresyon modeli, hata teriminin birinci mertebeden otoregresif süreç (AR(1)) izlediği durumda kurulan regresyonun tahminini vermektedir. Aşağıdaki panel veri modeli ele alındığında:

$$Y_{it} = X_{it}\beta + \mu_i + u_{it}$$

Burada u_{it} , AR(1) süreci izlemektedir:

$$u_{it} = \rho u_{it-1} + e_{it}$$

$|\rho| < 1$ 'dir ve e_{it} , sıfır ortalama ve σ_e^2 varyansla özdeş ve bağımsız dağılmaktadır. Bu bilgi kullanılarak tahmin yapılmaktadır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 353).

Genelleştirilmiş Tahmin Eşitliği Kitle Ortalaması Modeli

Genelleştirilmiş tahmin eşitliği kitle ortalaması modeli kalıntı varyansı için çeşitli varsayımlarla tahmin edilebilmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 355).

Driscoll-Kraay Standart Hatalar

Zaman boyutu T'nin büyük olduğu durumda Driscoll-Kraay (1998) standart parametrik olmayan zaman serisi kovaryans matris tahmincilerinin uzamsal ve dönemsel korelasyonun tüm genel formları için dirençli olabilecek şekilde geliştirilebileceğini göstermiştir. Driscoll-Kraay'ın metodolojisi, yatay kesit ortalamaları serisi için Newey-West türü düzeltme yapmaktadır. Bu şekilde düzeltilmiş standart hata tahminleri, yatay kesit boyut N'den bağımsız olarak ($N \rightarrow \infty$ bile) kovaryans matris tahmincilerinin tutarlılığını garantilemektedir. Böylece Driscoll-Kraay'ın yaklaşımı, yatay kesit boyutun büyüklüğü durumunda zayıf olan sadece büyük T olduğu durumda tutarlı kovaryans matris tahmincileri üreten Parks-Kmenta ya da Beck-Katz tahmincilerine alternatif olarak türetilmiştir. Ayrıca bahsedilen iki tahminci sadece klasik model için kullanılırken Driscoll-Kraay tahmincisi sabit ve tesadüfi etkiler modelleri için de kullanılabilir. Bu tahminci, büyük T ve N durumunda bile heteroskedasite varlığında tutarlı, uzamsal ve dönemsel korelasyonun genel formlarında dirençli standart hatalar üretmektedir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 359).

Parametre tahminlerinin Driscoll ve Kraay standart hataları asimptotik (dirençli) kovaryans matrisinin diyagonal elemanlarının karekökleri yardımıyla elde edilmektedir. Driscoll-Kraay varyans kovaryans matrisi:

$$V(\hat{\beta}) = (X'X)^{-1} \hat{S}_T (X'X)^{-1}$$

$\hat{S}_T$, aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\hat{S}_T = \hat{\Omega}_0 + \sum_{j=1}^{m(T)} w(j, m) [\hat{\Omega}_j + \hat{\Omega}_j']$$

$m(T)$, otokorelasyon için gecikme uzunluğunu ifade etmektedir. $w(j, m(T)) = 1 - j / (m(T) + 1)$ olarak ifade edilen Bartlett ağırlıkları, $\hat{S}_T$ 'nin pozitif tanımlı olmasını sağlamakta ve örnek otokovaryans fonksiyonunda yüksek mertebeden gecikmelerin düşük ağırlıklar almasına imkan sağlamaktadır. $(K+1) \times (K+1)$ boyutlu $\hat{\Omega}_j$ matrisi ise, aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır;

$$\hat{\Omega}_j = \sum_{t=j+1}^T h_t(\hat{\beta}) h_{t-j}(\hat{\beta})'$$

burada, $h_t(\hat{\beta}) = \sum_{i=1}^{N(t)} h_{it}(\hat{\beta})$ eşitliği vardır. Her bir birim için t moment koşullarının karesi $h_{it}(\hat{\beta})$, farklı T 'lere sahip N 'ler için hesaplanmaktadır. Bu küçük düzeltme ile Driscoll-Kraay kovaryans matris tahmincisi, dengesiz panel veri modellerinde de kullanılabilir. HEKK tahmininde birimler için ortogonalite koşulları $h_{it}(\hat{\beta})$, doğrusal regresyonun $(K+1) \times 1$ boyutlu moment koşullarıdır (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 360).

Hesaplanan Driscoll ve Kraay'ın kovaryans matris tahmincisi, $h_{it}(\hat{\beta})$ 'nin yatay kesit ortalamalarının zaman serileri için uygulanan Newey-West'in heteroskedastite ve oto-korelasyon varlığında dirençli kovaryans matris tahmincisine eşittir. Yatay kesit ortalamalara dayanan bu yaklaşımla, standart hata tahminleri, yatay kesit boyut N 'e bağlı olmaksızın tutarlıdır. Driscoll ve Kraay, N 'in sonsuza gittiği durumda bile tutarlılığın sağlandığını göstermiştir. Ayrıca, tahmin edilen kovaryans matrisinden elde edilen standart hatalar, uzamsal ve dönemsel korelasyonun tüm genel formları için de dirençlidir (Yerdelen Tatoğlu, 2024, s. 360-361).